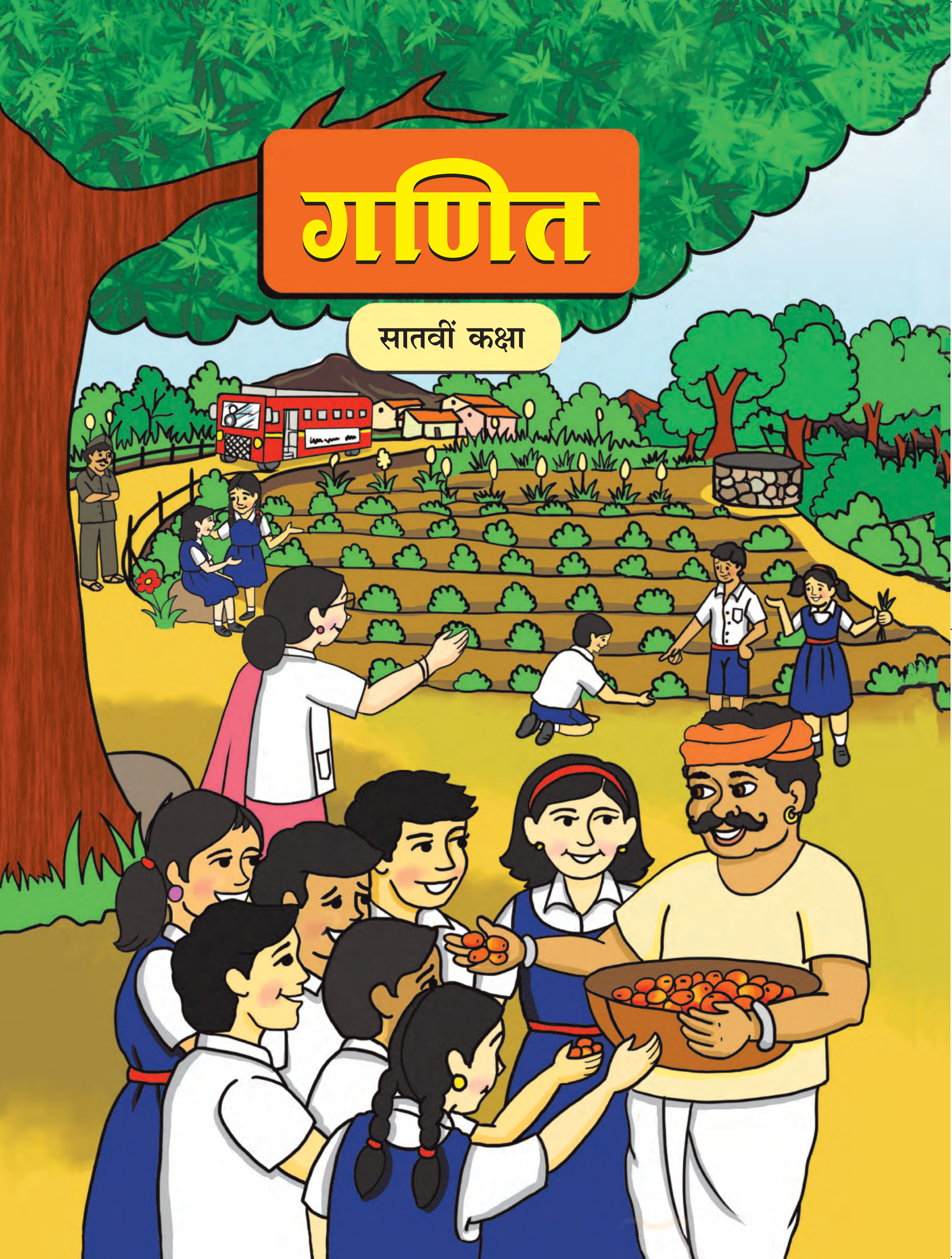
गणित

सातवीं कक्षा



शासन निर्णय क्रमांक : अभ्यास-२११६/(प्र.क्र.४३/१६) एसडी-४ दिनांक २५.४.२०१६ के अनुसार समन्वय समिति का गठन किया गया । दि. ३.३.२०१७ को हुई इस समिति की बैठक में यह पाठ्यपुस्तक निर्धारित करने हेतु मान्यता प्रदान की गई ।

गणित

सातवीं कक्षा

महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक निर्मिती व अभ्यासक्रम संशोधन मंडळ, पुणे - ४११ ००४

संलग्न 'क्यू आर कोड' तथा इस पुस्तक में अन्य स्थानों पर दिए गए 'क्यू आर कोड' स्मार्ट फोन का प्रयोग कर स्कैन कर सकते हैं । स्कैन करने के उपरांत आपको इस पाठ्यपुस्तक के अध्ययन-अध्यापन के लिए उपयुक्त लिंक/लिंक्स (URL) प्राप्त होंगी ।

प्रथमावृत्ति : २०१७

गणित विषयतज्ञ समिति

डॉ. मंगला नारळीकर (अध्यक्ष)
डॉ. जयश्री अत्रे (सदस्य)
श्री रमाकांत सरोदे (सदस्य)
श्री दादासो सरडे (सदस्य)
श्री संदीप पंचभाई (सदस्य)
श्रीमती लता टिळेकर (सदस्य)
श्रीमती उज्ज्वला गोडबोले (सदस्य-सचिव)

गणित विषय – राज्य अभ्यासगट सदस्य

श्रीमती पूजा जाधव	श्री अन्सार शेख
श्री गणेश कोलते	श्री प्रमोद ठोंबरे
श्री रामा व्हन्याळकर	श्री प्रकाश झेंडे
श्रीमती सुवर्णा देशपांडे	श्री बन्सी हावळे
श्री उमेश रेळे	श्री श्रीकांत रत्नपारखी
श्री आण्णापा परीट	श्री सूर्यकांत शहाणे
श्री श्रीपाद देशपांडे	श्री सुरेश दाते
श्री राजेंद्र चौधरी	श्री प्रकाश कापसे
श्री चंदन कुलकर्णी	श्री सलीम हाश्मी
श्रीमती अनिता जावे	श्रीमती आर्या भिडे
श्रीमती बागेश्री चव्हाण	श्री मिलिंद भाकरे
श्री कल्याण कडेकर	श्री ज्ञानेश्वर माशाळकर
श्री संदेश सोनावणे	श्री लक्ष्मण दावणकर
श्री सुजित शिंदे	श्री सुधीर पाटील
डॉ हनुमंत जगताप	श्री राजाराम बंडगर
श्री प्रताप काशिद	श्रीमती रोहिणी शिर्के
श्री काशिराम बाविसाने	श्री सागर सकुडे
श्री पप्पु गाडे	श्री प्रदीप गोडसे
	श्री रवींद्र खंदारे

श्रीमती प्राजक्ती गोखले (निमंत्रित सदस्य)

प्रकाशक

विवेक उत्तम गोसावी, नियंत्रक
पाठ्यपुस्तक निर्मिती मंडळ
प्रभादेवी, मुंबई २५

प्रमुख संयोजक : **उज्ज्वला श्रीकांत गोडबोले**
प्र. विशेषाधिकारी गणित
पाठ्यपुस्तक मंडळ, पुणे

मुखपृष्ठ एवं सजावट : धनश्री मोकाशी, पुणे

संगणकीय आरेखन : संदीप कोळी, मुंबई

चित्रकार : धनश्री मोकाशी

भाषांतरकार : श्री अनमोल ओझा

समीक्षक : श्री गजानन सूर्यवंशी
श्री धीरज शर्मा

भाषांतर संयोजन : **डॉ. अलका पोतदार**
विशेषाधिकारी, हिंदी

संयोजन सहायक : **सौ संध्या वि. उपासनी**
विषय सहायक, हिंदी

निर्मिति : **सच्चितानंद आफळे**
मुख्य निर्मिति अधिकारी
संजय कांबळे
निर्मिति अधिकारी
प्रशांत हरणे
सहा. निर्मिति अधिकारी

अक्षरांकन : विद्या विभाग
पाठ्यपुस्तक मंडळ, पुणे

कागज : ७० जी.एस.एम.क्रीमवोव्ह

मुद्रणादेश : N/PB/2017-18/25,000

मुद्रक : SHIV OFFSET PRINTERS, SANGLI

भारत का संविधान

उद्देशिका

हम, भारत के लोग, भारत को एक **संपूर्ण प्रभुत्व-संपन्न समाजवादी पंथनिरपेक्ष लोकतंत्रात्मक गणराज्य** बनाने के लिए, तथा उसके समस्त नागरिकों को :

सामाजिक, आर्थिक और राजनैतिक **न्याय,**

विचार, अभिव्यक्ति, विश्वास, धर्म

और उपासना की **स्वतंत्रता,**

प्रतिष्ठा और अवसर की **समता**

प्राप्त कराने के लिए,

तथा उन सब में

व्यक्ति की गरिमा और राष्ट्र की एकता

और अखंडता सुनिश्चित करने वाली **बंधुता**

बढ़ाने के लिए

दृढ़संकल्प होकर **अपनी इस संविधान सभा में** आज तारीख 26 नवंबर, 1949 ई. (मिति मार्गशीर्ष शुक्ला सप्तमी, संवत् दो हजार छह विक्रमी) **को एतद् द्वारा इस संविधान को अंगीकृत, अधिनियमित और आत्मार्पित करते हैं ।**

राष्ट्रगीत

जनगणमन – अधिनायक जय हे
भारत – भाग्यविधाता ।
पंजाब, सिंधु, गुजरात, मराठा,
द्राविड, उत्कल, बंग,
विंध्य, हिमाचल, यमुना, गंगा,
उच्छल जलधितरंग,
तव शुभ नामे जागे, तव शुभ आशिस मागे,
गाहे तव जयगाथा,
जनगण मंगलदायक जय हे,
भारत – भाग्यविधाता ।
जय हे, जय हे, जय हे,
जय जय जय, जय हे ।।

प्रतिज्ञा

भारत मेरा देश है । सभी भारतीय मेरे भाई–बहन हैं ।

मुझे अपने देश से प्यार है । अपने देश की समृद्ध तथा विविधताओं से विभूषित परंपराओं पर मुझे गर्व है ।

मैं हमेशा प्रयत्न करूँगा/करूँगी कि उन परंपराओं का सफल अनुयायी बनने की क्षमता मुझे प्राप्त हो ।

मैं अपने माता–पिता, गुरुजनों और बड़ों का सम्मान करूँगा/करूँगी और हर एक से सौजन्यपूर्ण व्यवहार करूँगा/करूँगी ।

मैं प्रतिज्ञा करता/करती हूँ कि मैं अपने देश और अपने देशवासियों के प्रति निष्ठा रखूँगा/रखूँगी । उनकी भलाई और समृद्धि में ही मेरा सुख निहित है ।

प्रस्तावना

विद्‌यार्थी मित्रो,

तुम सभी का सातवीं कक्षा में स्वागत है! तुमने पहली से छठी कक्षा तक की पाठ्‌यपुस्तक का अभ्यास किया है । गणित सातवीं की पाठ्‌यपुस्तक तुम्हारे हाथ में देते हुए हमें आनंद हो रहा है ।

यह विषय तुम्हें सरलता से समझे, मनोरंजक लगे, नया ज्ञान प्राप्त हो साथ ही नए प्रश्न हल करने का आनंद प्राप्त हो, ऐसा हमें लगता है । इसलिए पाठ्‌यपुस्तक में कुछ कृतियाँ तथा रचनाएँ दी गई हैं वह तुम जरूर देखो। इसमें से कुछ मजेदार, नए गुणधर्म ध्यान में आते हैं क्या, यह देखो। आपसी बातचीत से नए मुद्‌दे समझ सकते हो । चित्र, वेन आकृति तथा इंटरनेट की सहायता से गणित समझना सरल होता है । इन मुद्‌दों को अच्छी तरह से समझें तो गणित बिलकुल कठिन नहीं है । ऐसी अपेक्षा है कि पाठ्‌यपुस्तक का प्रत्येक प्रकरण ध्यान से पढ़ा जाए । यदि कोई भाग समझ में न आए तो शिक्षक, पालक अथवा वरिष्ठ विद्‌यार्थी की सहायता से समझ लो ! गणित हल करने की विधि, उसी प्रकार उनके सूत्र क्यों तथा कैसे तैयार हुए इसका स्पष्टीकरण इस पाठ्‌यपुस्तक में दिया गया है । इस विधि का उपयोग कर उदाहरण हल करने का अभ्यास करें, यह विशेष महत्त्वपूर्ण है। प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह में दिए गए उदाहरण जैसे ही कुछ उदाहरण तुम तैयार करो । अधिक आहवानात्मक उदाहरण इस पाठ्‌यपुस्तक में तारांकित किए गए हैं । आयताकार आकृति में दिया आशय आगे तुम्हें अभ्यास के लिए अवश्य उपयोगी होगा ।

पहली कक्षा से सीखे हुए गणित का तुम्हें आगे भी हमेशा उपयोग होगा । उदाहरणार्थ- जोड़ना, घटाना, गुणा, भाग आदि तुम्हें भूलना नहीं है समझे ! इनका अभ्यास करो । यह सभी संक्रियाएँ उदाहरण हल करते समय कई बार करनी पड़ेंगी ।

सातवीं के गणित में कई मूलभूत संकल्पनाएँ हैं, यह समझ गए तो आगे की कक्षा में अध्ययन करना सरल होगा । चलो, देखें कि गणित की पुस्तक तुम्हारी मित्र होती है या नहीं !

(डॉ. सुनिल मगर)
संचालक
महाराष्ट्र राज्य पाठ्‌यपुस्तक निर्मिती व
अभ्यासक्रम संशोधन मंडळ, पुणे

पुणे
दिनांक : २८ मार्च २०१७
भारतीय सौर दिनांक : ७ चैत्र १९३९

७ वीं कक्षा के अभ्यासक्रम से विद्‌यार्थियों में निम्नलिखित क्षमताएँ विकसित होंगी ।

क्षेत्र	घटक	क्षमता
1. **संख्याज्ञान**	1.1 परिमेय संख्याओं पर संक्रियाएँ 1.2 मसावि, लसावि तथा उनके गुणधर्म 1.3 घातांक और वर्गमूल	• दूसरे विषयों के संख्यात्मक उदाहरण हल करते समय संख्याज्ञान का उपयोग आत्मविश्वास से करना । • संख्यात्मक और शाब्दिक उदाहरण में मसावि तथा लसावि का उपयोग करना । • सबसे बड़ी अथवा सबसे छोटी संख्या को घातांक रूप में लिखना । • स्वयं के प्रश्न और पहेली तैयार करना ।
2. **बीजगणित**	2.1 बैजिक व्यंजकों की पहचान तथा उनपर संक्रिया 2.2 वर्गीय सूत्र तथा बैजिक व्यंजक के गुणनखंड 2.3 एक चरांकवाले समीकरण	• व्यवहार की कठिनाइयाँ हल करते समय बीजगणित के सूत्र तथा नियमों का उपयोग करना । • शीघ्रता से गणितीय संक्रिया करने के लिए बैजिक व्यंजकों के संदर्भ में विविध सूत्र तथा नियमों का उपयोग करना । • दी गई जानकारी को समीकरण के स्वरूप में लिखना तथा हल ज्ञात करना ।
3. **भूमिति**	3.1 सर्वांगसमता 3.2 बहुभुजाकृति 3.3 विशिष्ट कोणों की जोड़ियाँ 3.4 पायथागोरस का सिद्‌धांत 3.5 त्रिभुजों की रचना 3.6 वृत्त	• सर्वांगसम आकृतियों को पहचानना । • विविध आकृतियों के गुणधर्म से संबंधित कथनों की सच्चाई को जाँचना । • कोणों की जोड़ियाँ पहचानना । • क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए तथा भूमिति के कुछ प्रश्न में पायथागोरस के सिद्‌धांत का उपयोग करना । • भौमितिक रचनाएँ करते समय उचित गुणधर्म का चुनाव करना । • त्रिभुजों के लंबसमद्‌विभाजक तथा कोण समद्‌विभाजक संगामी होते हैं, उसकी जाँच करना । • व्यास तथा परिधि के संबंधों को जाँचना । • ICT Tools की सहायता से विविध भौमितिक आकृतियों के गुणधर्म जाँचना ।

७ वीं कक्षा के अभ्यासक्रम से विद्यार्थियों में निम्नलिखित क्षमताएँ विकसित होंगी		
4. क्षेत्रमिति	4.1 परिमिति और क्षेत्रफल 4.2 पृष्ठफल	• त्रिभुज, आयत तथा चतुर्भुज के क्षेत्रफल ज्ञात करना । • परिमिति तथा क्षेत्रफल पर आधारित मिश्र उदाहरण हल करना । • समघन और घनाभ का पृष्ठफल ज्ञात करना ।
5. व्यावहारिक गणित	5.1 समानुपात तथा विलोमानुपात 5.2 बैंक और साधारण ब्याज 5.3 हिस्सेदारी	• समानुपात और विलोमानुपात पहचानकर उसपर आधारित उदाहरण हल करना । • आर्थिक नियोजन तथा निवेश के संदर्भ की जानकारी का उपयोग कर उदाहरण हल करना । • भागीदारी के संदर्भ में लाभ तथा हानि का उचित विभाजन करना ।
6. जानकारी का नियोजन	6.1 संयुक्त स्तंभालेख 6.2 औसत 6.3 बारंबारता सारणी	• संयुक्त स्तंभालेख द्‌वारा जानकारी का प्रस्तुतीकरण करना। • दिए गए संयुक्त स्तंभालेख का वाचन करना तथा उसकी जानकारी ज्ञात करना । • दिए गए प्राप्तांक (आँकड़ों) से औसत ज्ञात करना । • दृकश्राव्य माध्यम से क्रिकेट खेल की जानकारी, मतदान की जानकारी, विविध शहरों की अधिकतम तथा न्यूनतम तापमान की जानकारी का संयुक्त स्तंभालेख तैयार करना । • अधिक पैमाने पर सामग्री देने पर गणन चिह्न की सहायता से बारंबारता सारिणी तयार करना ।

शिक्षकों के लिए मुद्‌दे

सातवीं कक्षा की पाठ्‌यपुस्तक का उपयोग कक्षा में प्रश्नोत्तर, कृति, चर्चा तथा विद्यार्थियों में संवाद विविध माध्यम से होना आवश्यक है । इसके लिए पाठ्‌यपुस्तक का गहन वाचन करें । पाठ्‌यपुस्तक में अपना परिसर भूगोल, विज्ञान, अर्थशास्त्र इन सभी विषयों का गणित से समन्वय होता है । ऐसे सभी विषयों में गणित की संकल्पना का उपयोग शिक्षकों को होता है यह विद्यार्थियों को दर्शाएँ । इससे व्यवहार में गणित का उपयोग स्पष्ट होगा तथा इस पढ़ाई के महत्त्व को विद्यार्थीं समझ सकेंगे । गणित की संकल्पनाओं का स्पष्टीकरण सरल भाषा में दिया गया है। प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह में दिए गए उदाहरणों पर आधारित अन्य उदाहरण शिक्षक स्वयं तैयार करके विद्यार्थियों को हल करने के लिए दें तथा उन्हें भी नए उदाहरण तैयार करने के लिए प्रोत्साहित करें ।

विद्यार्थियों के लिए कुछ आहवानात्मक प्रश्न तारांकित स्वरुप में दिए गए हैं । अधिक जानकारी के लिए इस चुनौती पूर्ण शीर्षक के अंतर्गत तालिका और जानकारी दी गई है । यह जानकारी गणित में आगे अध्ययन करते समय विद्यार्थियों के लिए अवश्य उपयोगी होगी । सातवीं कक्षा गणित की यह पाठ्‌यपुस्तक आप सब को अवश्य पसंद आएगी, ऐसी हमें आशा है ।

अनुक्रमणिका

विभाग पहला

विभाग दूसरा

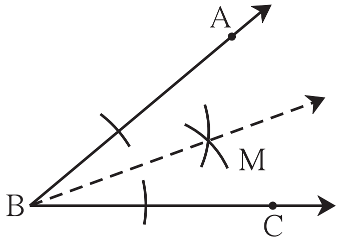
1

ज्यामितीय रचना

आओ, थोड़ा याद करें

- हमने पिछली कक्षाओं में रेखा, रेखाखंड, कोण, कोण समद्विभाजक आदि का अध्ययन किया है। हम 'कोण' का माप अंश में मापते हैं। $\angle ABC$ का माप 40° हो तो यह जानकारी हम $m\angle ABC = 40^\circ$ इस प्रकार लिखते हैं।

कोणसमद्विभाजक (Angle bisector)



संलग्न आकृति में $\angle ABC$ की आकृति दी गई है। कोणसमद्विभाजक यह कोण को दो समान भागों में विभाजित करता है। किरण BM यह $\angle ABC$ की समद्विभाजक है क्या ?

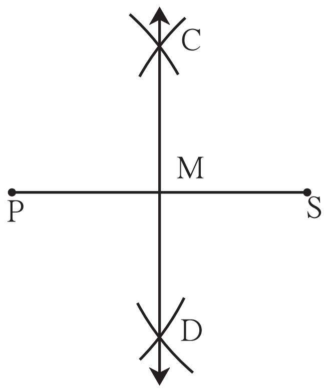
रेखाखंड का लंबसमद्विभाजक (Perpendicular bisector of a line segment)

4 सेमी लंबाई का रेखाखंड PS खींचो और उसका लंब समद्विभाजक बनाओ। उसे रेखा CD नाम दो।

- रेखा CD लंबसमद्विभाजक है, यह जाँचने के लिए क्या करोगे ?

  $m\angle CMS = \boxed{}^\circ$

- $l(PM) = l(SM)$ है क्या ?

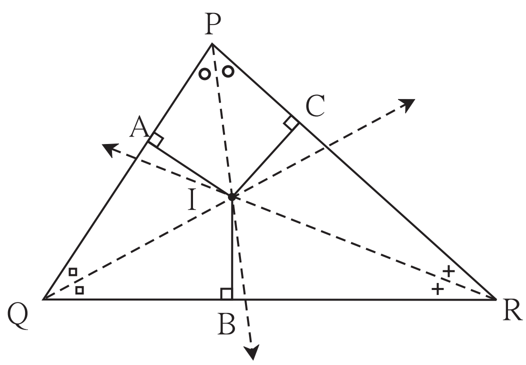


आओ, समझें

त्रिभुज के कोणों के समद्विभाजकों का गुणधर्म

कृति

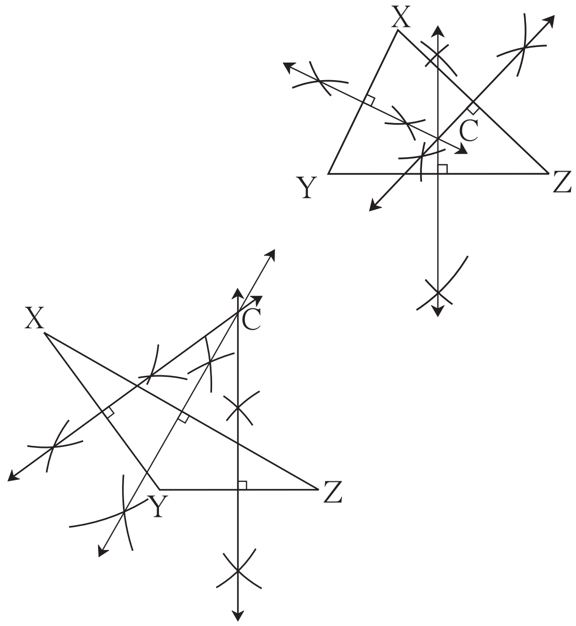
1. किसी भी प्रकार का एक त्रिभुज ΔPQR बनाओ।
2. कंपास की सहायता से त्रिभुज के तीनों कोणों को समद्विभाजित करो। (समद्विभाजक बड़े न हों तो उन्हें बढ़ाकर एक-दूसरे को प्रतिच्छेदित करें, ऐसी रचना करो।)
3. ध्यान दो कि तीनों कोणों के समद्विभाजक एक ही बिंदु से होकर जाते हैं अर्थात ये **संगामी** हैं। उस संगमन बिंदु को I नाम दो।



4. त्रिभुज में बिंदु I से त्रिभुज की भुजाएँ PQ, QR तथा PR पर क्रमशः IA, IB तथा IC लंब खींचो। तीनों लंबों की लंबाई नापो। क्या दिखता है ? IA = IB= IC का अनुभव करो।

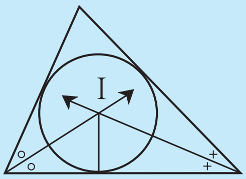
त्रिभुज की भुजाओं के लंबसमद्विभाजक का गुणधर्म

कृति

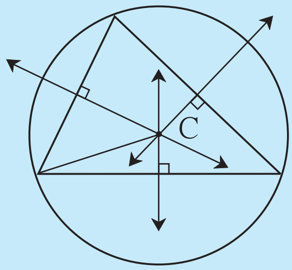


1. मापनपट्टी की सहायता से एक न्यूनकोण त्रिभुज तथा एक अधिककोण त्रिभुज की रचना करो। प्रत्येक त्रिभुज की भुजाओं के लंबसमद्विभाजक खींचो।
2. प्रत्येक त्रिभुज की भुजाओं के लंबसमद्विभाजक संगामी हैं ? इसका अनुभव करो।
3. त्रिभुज की तीनों भुजाओं के लंबसमद्विभाजक जिस बिंदु पर मिलते हैं, उस बिंदु को C नाम दो। C बिंदु से त्रिभुज के शीर्ष बिंदुओं की दूरी नापो। क्या दिखाई देता है ?
   CX = CY = CZ का अनुभव करो।
4. लंबसमद्विभाजकों का संगमन बिंदु कहाँ है, इसका निरीक्षण करो।

✸ अधिक जानकारी हेतु



(1) त्रिभुज के तीनों कोणों के समद्विभाजक **संगामी** (concurrent) होते हैं। उनके संगमन बिंदु को **अंत:केंद्र** (incentre) कहते हैं। उसे I अक्षर से दर्शाया जाता है।



(2) त्रिभुज की तीनों भुजाओं के लंबसमद्विभाजक **संगामी** होते हैं। उनके संगमन बिंदु को **परिकेंद्र** (circumcentre) कहते हैं। उसे C अक्षर से दर्शाया जाता है।

प्रश्नसंग्रह 1

1. नीचे दी गई लंबाई के रेखाखंड बनाकर उनके लंबसमद्विभाजक खींचो।
   (i) 5.3 सेमी (ii) 6.7 सेमी (iii) 3.8 सेमी
2. नीचे दिए गए माप के कोण बनाओ तथा उनके समद्विभाजक खींचो।
   (i) 105° (ii) 55° (iii) 90°
3. एक अधिककोण त्रिभुज तथा एक समकोण त्रिभुज बनाओ। प्रत्येक त्रिभुज के कोणों के समद्विभाजकों का संगमन बिंदु बनाओ। प्रत्येक त्रिभुज का संगमन बिंदु कहाँ है ?
4. एक समकोण त्रिभुज बनाओ। उसकी भुजाओं के लंबसमद्विभाजक खींचो। उनका संगमन बिंदु कहाँ है ?

5*. मैथिली, शैला तथा अजय तीनों एक ही शहर के अलग-अलग स्थानों पर रहते हैं। उनके घरों से समान दूरी पर खिलौनों की एक दुकान है। इसे आकृति की सहायता से दर्शाने के लिए कौन-सी भूमितीय रचना का उपयोग करोगे ? तत्संबंधी स्पष्टीकरण दो।

आओ, समझें

त्रिभुजों की रचना

कृति

कुछ कोणों तथा भुजाओं के माप दिए गए हों तो त्रिभुज की रचना कर पाना संभव हैं क्या, इसे देखते हैं।

ΔABC की रचना इस प्रकार करो जिसमें $l(AB) = 4$ सेमी, $l(BC) = 3$ सेमी हो।

- क्या ऐसे त्रिभुज की रचना हो सकती है ?
- तुम पाओगे कि उपर्युक्त शर्त का पालन करते हुए ऐसे अनेक त्रिभुजों की रचना की जा सकती है।
- इस जानकारी के आधार पर यदि केवल एक ही त्रिभुज बने ऐसी अपेक्षा हो तो और कौन-सी शर्तें जोड़नी होंगी ?

> प्रत्यक्ष निर्माण से पूर्व हर इमारत की रचना सर्वप्रथम कागज पर बनाते हैं। उस इमारत की छोटी-सी प्रतिकृति भी तुमने देखी होगी। इस रेखांकन के आधार पर इमारत का निर्माण आसान होता है। इसी प्रकार किसी भी भूमितीय रचना से पहले उसकी कच्ची आकृति बना लेने से रचना करने में सहायता मिलती है और रचना की क्रियाओं का क्रम निश्चित कर सकते हैं।

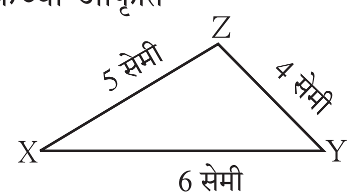
(I) त्रिभुज की तीनों भुजाओं की लंबाई दी गई हो तो त्रिभुज की रचना करना।

उदा. ΔXYZ की रचना करो जिसमें $l(XY) = 6$ सेमी, $l(YZ) = 4$ सेमी तथा $l(XZ) = 5$ सेमी हों।

कच्ची आकृति बनाते समय दी गई जानकारी शीघ्रातिशीघ्र और यथासंभव योग्य अनुपात में दिखाएँगे। उदाहरणार्थ भुजा XY सबसे बड़ी भुजा है अतः कच्ची आकृति में भी उसी प्रकार होनी चाहिए।

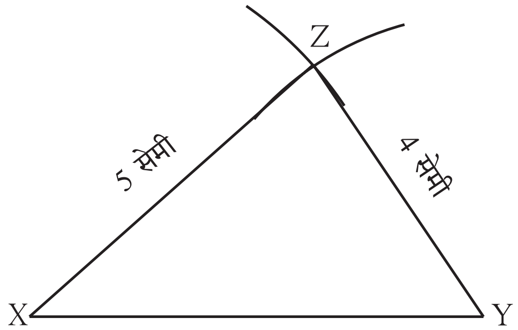
आकृति बनाने की क्रमिक विधि :

कच्ची आकृति

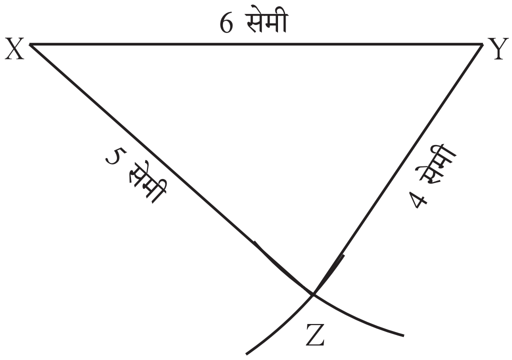


1. कच्ची आकृति की तरह ही रेख XY यह 6 सेमी लंबाई का आधार लिया गया है।
2. रेख XZ की लंबाई 5 सेमी है अतः कंपास में 5 सेमी का अंतर लेकर कंपास की नोक बिंदु X पर रखकर रेख XY की एक ओर एक चाप खींचो।
3. कंपास में 4 सेमी का अंतर लेकर कंपास की नोक बिंदु Y पर रखकर पहले खींचे गए चाप की दिशा में उस चाप को प्रतिच्छेदित करनेवाला दूसरा चाप खींचा। प्रतिच्छेदन बिंदु को Z नाम दो।

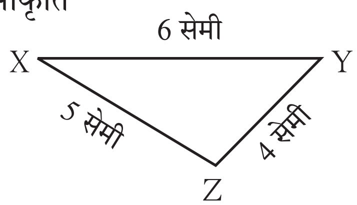
   रेख XZ तथा रेख YZ खींचो।



इसी प्रकार आधार के दूसरी ओर चाप खींचकर भी त्रिभुज की रचना दिखाई गई है।



कच्ची आकृति



प्रश्नसंग्रह 2

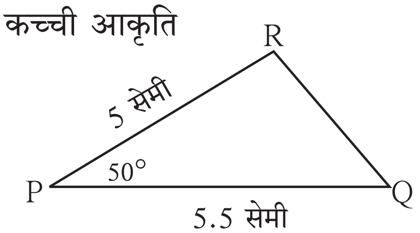
1. नीचे दिए गए मापों के आधार पर त्रिभुज की रचना करो।
   (a) ΔABC में $l(AB) = 5.5$ सेमी, $l(BC) = 4.2$ सेमी, $l(AC) = 3.5$ सेमी।
   (b) ΔSTU में $l(ST) = 7$ सेमी, $l(TU) = 4$ सेमी, $l(SU) = 5$ सेमी।
   (c) ΔPQR में $l(PQ) = 6$ सेमी, $l(QR) = 3.8$ सेमी, $l(PR) = 4.5$ सेमी।
2. आधार 5 सेमी तथा शेष प्रत्येक 3.5 सेमी लंबी भुजावाले समद्विबाहु त्रिभुज की रचना करो।
3. 6.5 सेमी लंबी भुजावाले समबाहु त्रिभुज की रचना करो।
4. अपनी इच्छा से भुजाओं की लंबाई लेकर एक समबाहु त्रिभुज, एक समद्विबाहु त्रिभुज तथा एक विषमबाहु त्रिभुज की रचना करो।

(II) त्रिभुज की दो भुजाएँ तथा उनमें समाविष्ट कोण दिया गया हो तो त्रिभुज की रचना करना।

उदा. ΔPQR की रचना करो जिसमें $l(PQ) = 5.5$ सेमी, $m\angle P = 50°$, तथा $l(PR) = 5$ सेमी हो।

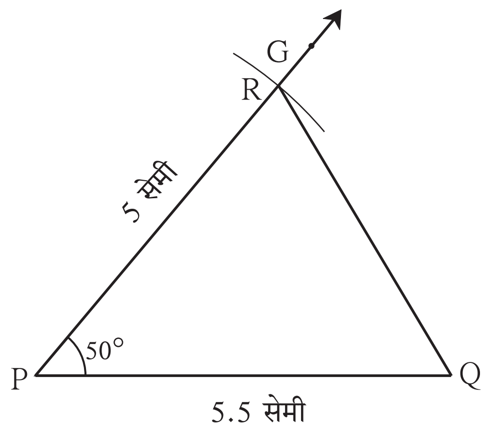
(कच्ची आकृति बनाकर उसमें दी गई जानकारी दर्शाई गई है। $\angle P$ न्यूनकोण है। इसे कच्ची आकृति में भी दिखाया गया है।)

कच्ची आकृति



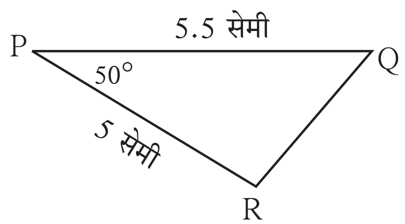
आकृति बनाने की क्रमिक विधि

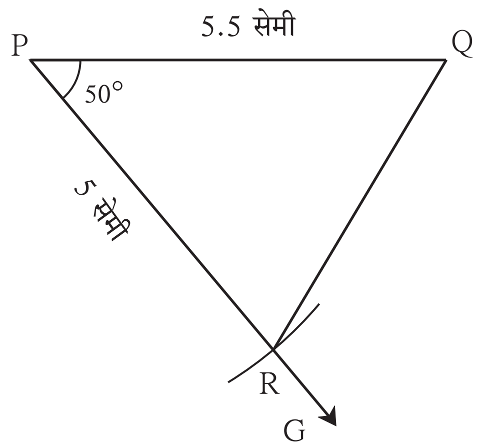
1. कच्ची आकृति के अनुसार आधार PQ यह 5.5 सेमी लंबाई वाला लो।
2. किरण PG इस प्रकार खींचो की $m\angle GPQ = 50°$ हो।
3. कंपास में 5 सेमी अंतर लो। कंपास की नोक बिंदु P पर रखकर किरण PG पर चाप खींचो। उस प्रतिच्छेदन बिंदु को R नाम दो। बिंदु Q तथा बिंदु R जोड़ो। अपेक्षित ΔPQR तैयार है।



किरण PG यह रेख PQ के दूसरी ओर भी बना सकते हैं। नीचे दिए गए ढंग से कच्ची आकृति ΔPQR बनाओ।

कच्ची आकृति





प्रश्नसंग्रह 3

⦿ नीचे दिए गए मापों के आधार पर त्रिभुज की रचना करो।

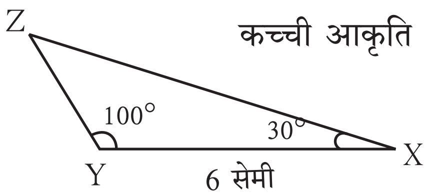
1. ΔMAT में $l(MA) = 5.2$ सेमी, $m\angle A = 80°$, $l(AT) = 6$ सेमी
2. ΔNTS में $m\angle T = 40°$, $l(NT) = l(TS) = 5$ सेमी
3. ΔFUN में $l(FU) = 5$ सेमी, $l(UN) = 4.6$ सेमी, $m\angle U = 110°$
4. ΔPRS में $l(RS) = 5.5$ सेमी, $l(RP) = 4.2$ सेमी, $m\angle R = 90°$

(III) दो कोण तथा उनमें समाविष्ट भुजाओं की लंबाई देने पर त्रिभुज की रचना करना।

उदा. ΔXYZ की रचना करो जिसमें $l(YX) = 6$ सेमी, $m\angle ZXY = 30°$ तथा $m\angle XYZ = 100°$ हो।

$\angle XYZ$ यह अधिककोण है।

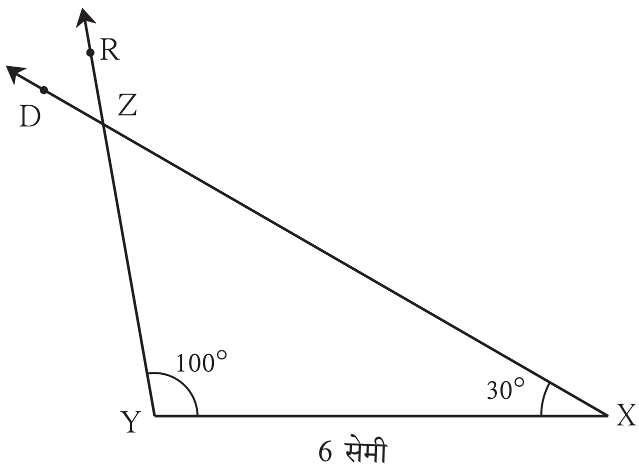
इसे कच्ची आकृति में भी दिखाया गया है।



कच्ची आकृति

आकृति बनाने की क्रमिक विधि

1. कच्ची आकृति के अनुसार आधार रेख YX यह 6 सेमी लो।
2. किरण YR इस प्रकार खींचो कि $m\angle XYR = 100°$ हो।
3. रेख XY की जिस दिशा में बिंदु R है, उसी दिशा में किरण XD इस प्रकार खींचो कि $m\angle YXD = 30°$ हो। किरण YR तथा किरण XD के प्रतिच्छेदन बिंदु को Z नाम दो। अपेक्षित त्रिभुज ΔXYZ तैयार है।
4. आधार के दूसरी ओर भी इसी प्रकार त्रिभुज की रचना कर सकते हैं।



जरा सोचो

उदा. ΔABC में $m\angle A = 60°$, $m\angle B = 40°$ तथा $l(AC) = 6$ सेमी है तो क्या तुम ΔABC की रचना कर सकते हो ? यदि नहीं तो त्रिभुज की रचना के लिए और कौन-सी जानकारी होनी चाहिए ? उस जानकारी को प्राप्त करने के लिए किस गुणधर्म का उपयोग करेंगे ? कच्ची आकृति बनाकर निश्चित करो।

त्रिभुज के तीनों कोणों के मापों के योगफल का गुणधर्म याद करो। AC को समाविष्ट करने वाले $\angle A$ तथा $\angle C$ के माप ज्ञात किए जा सकते हैं क्या ?

प्रश्नसंग्रह 4

⊙ नीचे दिए गए मापों के आधार पर त्रिभुज की रचना करो।

1. ΔSAT, में $l(AT) = 6.4$ सेमी, $m\angle A = 45^\circ$, $m\angle T = 105^\circ$।
2. ΔMNP, में $l(NP) = 5.2$ सेमी, $m\angle N = 70^\circ$, $m\angle P = 40^\circ$।
3. ΔEFG, में $l(FG) = 6$ सेमी, $m\angle F = 65^\circ$, $m\angle G = 45^\circ$।
4. ΔXYZ, में $l(XY) = 7.3$ सेमी, $m\angle X = 34^\circ$, $m\angle Y = 95^\circ$।

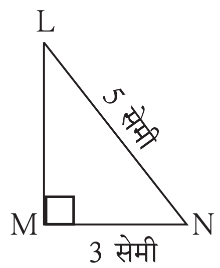
(IV) कर्ण तथा एक भुजा की लंबाई देने पर समकोण त्रिभुज की रचना करना।

हमें पता हैं त्रिभुज का एक कोण समकोण हो तो वह त्रिभुज समकोण त्रिभुज होता है। इस प्रकार के त्रिभुज में समकोण के **सामनेवाली भुजा कर्ण** होती है।

उदा. ΔLMN की रचना करो जिसमें कि $m\angle LMN = 90^\circ$, कर्ण = 5 सेमी तथा $l(MN) = 3$ सेमी हो।

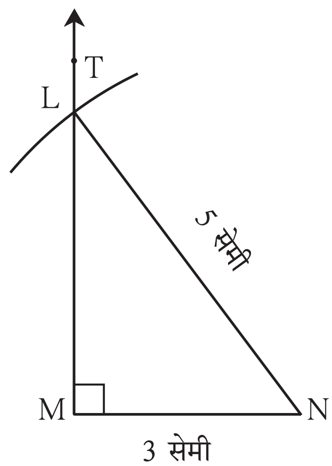
दी गई जानकारी के अनुसार कच्ची आकृति खींचो। $m\angle LMN = 90^\circ$ अतः अंदाज लेकर समकोण त्रिभुज की रचना की गई तथा उसे समकोण चिह्न से दिखाया गया है अर्थात दी गई जानकारी को कच्ची आकृति में दिखाया गया।

कच्ची आकृति



आकृति बनाने की क्रमिक विधि

1. कच्ची आकृति में दर्शाए अनुसार 3 सेमी लंबाईवाली आधार रेख MN खींचो।
2. रेख MN के बिंदु M से 90° माप का कोण बनाने वाला किरण MT खींचो।
3. कंपास में 5 सेमी अंतर लेकर तथा कंपास की नोक बिंदु N पर रखकर किरण MT को प्रतिच्छेदित करने वाला एक चाप खींचो। प्रतिच्छेदन बिंदु को L नाम दो। ΔLMN तैयार है।
4. ध्यान में रखो कि आधार की दूसरी ओर भी इसी प्रकार की आकृति की रचना कर सकते हैं।



प्रश्नसंग्रह 5

नीचे दिए गए मापों के आधार पर त्रिभुज की रचना करो।

1. ΔMAN में $m\angle MAN = 90^\circ$, $l(AN) = 8$ सेमी तथा $l(MN) = 10$ सेमी।
2. समकोण त्रिभुज STU की रचना करो जिसमें कर्ण SU = 5 सेमी तथा $l(ST) = 4$ सेमी।
3. ΔABC में $l(AC) = 7.5$ सेमी, $m\angle ABC = 90^\circ$, $l(BC) = 5.5$ सेमी।
4. ΔPQR में $l(PQ) = 4.5$ सेमी, $l(PR) = 11.7$ सेमी तथा $m\angle PQR = 90^\circ$
5. त्रिभुजों की रचना करने के लिए विद्यार्थी भिन्न-भिन्न मान लेकर अनेक उदाहरण तैयार कर अभ्यास करें।

कृति

नीचे दी गई जानकारी के आधार पर त्रिभुज बनाने का प्रयत्न करो।

1. ΔABC में $m\angle A = 85°$, $m\angle B = 115°$ तथा $l(AB) = 5$ सेमी
2. ΔPQR में $l(QR) = 2$ सेमी, $l(PQ) = 4$ सेमी, तथा $l(PR) = 2$ सेमी

तुम उपर्युक्त दोनों त्रिभुजों की रचना कर सकते हो क्या ? यदि नहीं तो उसका कारण पता लगाओ।

✸ अधिक जानकारी हेतु कृति

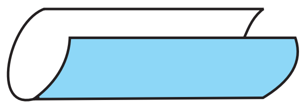
उदा. ΔABC इस प्रकार बनाओ कि $l(BC) = 8$ सेमी, $l(CA) = 6$ सेमी, तथा $m\angle ABC = 40°$।

8 सेमी लंबाई वाले आधार BC पर $40°$ का कोण बनाने वाला किरण खींचो उसपर $l(AC) = 6$ सेमी लेने पर A के लिए दो बिंदु मिलेंगे। इसे कंपास की सहायता से समझो। इसका अर्थ है कि दिए गए माप के अनुसार विभिन्न आकार के दो त्रिभुज मिलते हैं। त्रिभुज के तीनों कोण दिए गए हों किंतु एक भी भुजा न दी गई हो तो क्या त्रिभुज की रचना कर सकते हो ? यदि हाँ तो ऐसे कितने त्रिभुज बना सकते हैं ?

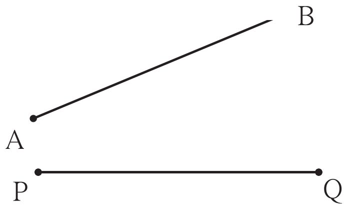
आओ, समझें

रेखाखंडों की सर्वांगसमता (Congruence of segments)

कृति I एक आयताकार कागज लो। इस कागज की सम्मुख भुजाएँ मिलाओ। वे हूबहू मिलती हैं, इस बात का अनुभव करो।



कृति II मापनपट्टी की सहायता से रेख AB की लंबाई और रेख PQ की लंबाई मापो और लिखो।



$l(AB) = $ .... $l(PQ) = $ ....

क्या रेख AB तथा रेख PQ इन दोनों रेखाखंडों की लंबाई समान है ? उन रेखाओं को उठाकर एक-दूसरे पर नहीं रख सकते। एक पारदर्शक कागज AB पर रखकर उस कागज पर रेख AB बिंदु के नाम सहित बना लो। पारदर्शक कागज पर मिला नया रेखाखंड, रेखाखंड PQ पर रखो और जाँचो। बिंदु A, बिंदु P पर और बिंदु B, बिंदु Q पर आ सकता है, इसे देखो। इसके आधार पर रेख AB यह रेख PQ के **सर्वांगसम** है, यह समझ सकते हैं।

इससे यह निष्कर्ष प्राप्त होता है कि यदि दो रेखाखंडों की लंबाई समान हो तो वे परस्पर हूबहू मिलते हैं अर्थात वे **सर्वांगसम** हैं; ऐसा कह सकते हैं। यदि रेखाखंड AB रेखाखंड PQ के सर्वांगसम हो तो इसे रेख AB $\cong$ रेख PQ इस प्रकार लिखते हैं।

यह मैंने समझा

- यदि दिए गए रेखाखंडों की लंबाई समान हो तो वे रेखाखंड सर्वांगसम होते हैं।

- यदि रेख AB $\cong$ रेख PQ तो रेख PQ $\cong$ रेख AB
- यदि रेख AB $\cong$ रेख PQ, रेख PQ $\cong$ रेख MN तो ध्यान रखो कि रेख AB $\cong$ रेख MN

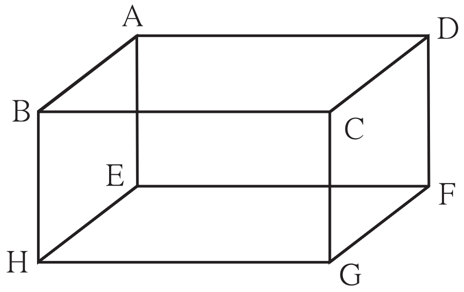
इसका अर्थ हैं कि एक रेखाखंड दूसरे के और दूसरा रेखाखंड तीसरे के सर्वांगसम हो तो पहला रेखाखंड तीसरे रेखाखंड के सर्वांगसम होता है।

कृति I

कोई एक आयताकार खोखा लो। उसके प्रत्येक कोर (किनार) की लंबाई नापो। कौन-सी कोरें सर्वांगसम हैं, इसका निरीक्षण करो।

कृति II

नीचे दी गई आकृति के आधार पर रेखाखंडों की सर्वांगसम जोड़ियाँ लिखो।



(1) रेख AB ≅ रेख DC

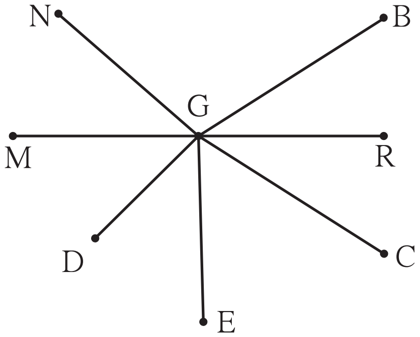
(2) रेख AE ≅ रेख BH

(3) रेख EF ≅ रेख ....

(4) रेख DF ≅ रेख ....

प्रश्नसंग्रह 6

1. नीचे दी गई आकृति में सर्वांगसम रेखाखंडों की जोड़ियाँ लिखो। (विभाजक का उपयोग कर पता लगाओ।)



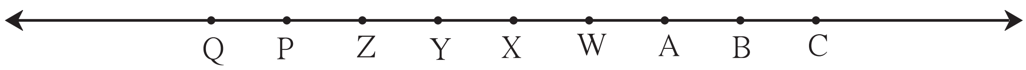
(i) ....

(ii) ....

(iii) ....

(iv) ....

2. नीचे दी गई रेखा पर संलग्न बिंदुओं के बीच का अंतर समान है। इस आधार पर रिक्त स्थानों की पूर्ति करो।



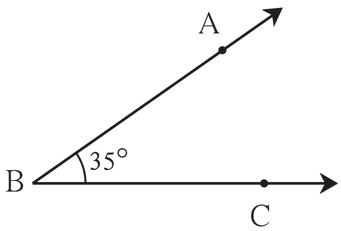
(i) रेख AB ≅ रेख .... (ii) रेख AP ≅ रेख .... (iii) रेख AC ≅ रेख ....

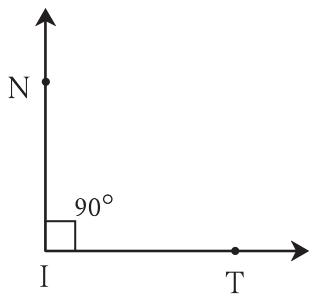
(iv) रेख .... ≅ रेख BY (v) रेख .... ≅ रेख YQ (vi) रेख BW ≅ रेख ....

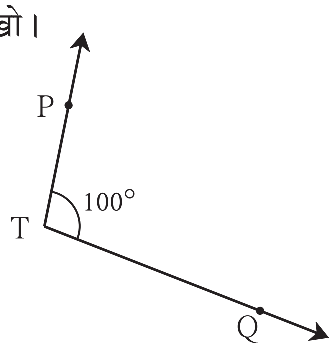
आओ, समझें

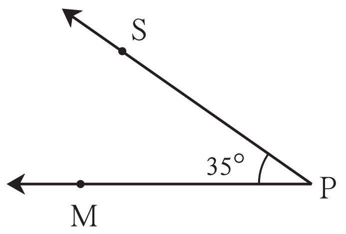
कोणों की सर्वांगसमता (Congruence of angles)

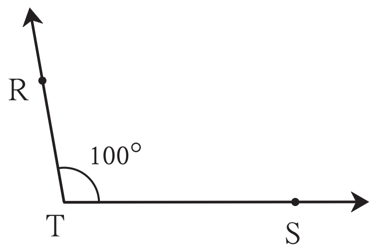
नीचे दिए गए कोणों का निरीक्षण कर समान मापवाले कोणों की जोड़ियाँ लिखो।

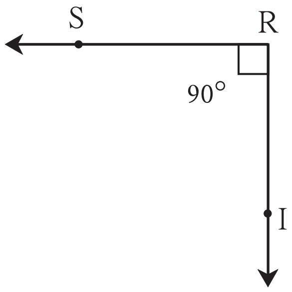




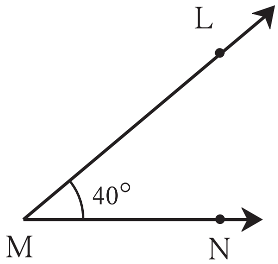


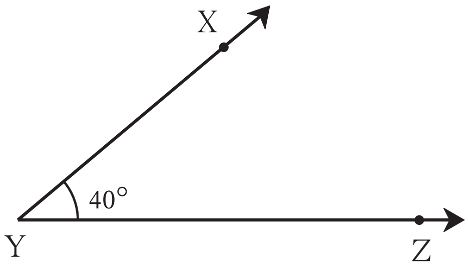






कृति





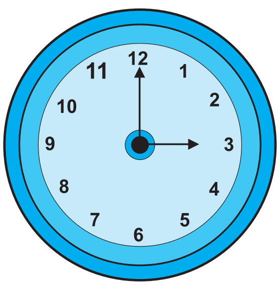
उपर्युक्त आकृति में दर्शाए अनुसार $\angle LMN$ तथा $\angle XYZ$ ये दो कोण 40° के बनाओ। $\angle LMN$ पर एक पारदर्शक कागज रखकर बिंदु के नामसहित कोणों की भुजाएँ खींच लो। पारदर्शक कागज उठाकर प्राप्त कोण $\angle XYZ$ पर रखो। बिंदु M बिंदु Y पर, किरण MN किरण YZ पर रखकर किरण ML किरण YX पर आता है, इसे अनुभव करो। इसके आधार पर पता चलता है कि समान मापवाले कोण सर्वांगसम होते हैं। कोणों की सर्वांगसमता कोणों के माप पर निर्भर होती है। $\angle LMN$ तथा $\angle XYZ$ सर्वांगसम हैं। इसे $\angle LMN \cong \angle XYZ$ इस प्रकार लिखते हैं।

यह मैंने समझा

- जिन कोणों के माप समान होते हैं, वे कोण सर्वांगसम होते हैं।

- यदि $\angle LMN \cong \angle XYZ$ तो $\angle XYZ \cong \angle LMN$
- यदि $\angle LMN \cong \angle ABC$, और $\angle ABC \cong \angle XYZ$ हो तो $\angle LMN \cong \angle XYZ$

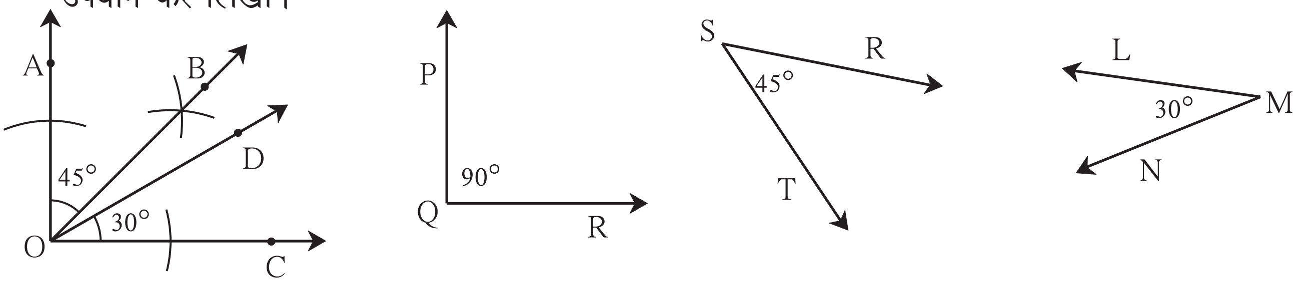
आओ, चर्चा करें



- घड़ी में कितने बजे हैं ? ☐
- दो सुइयों में कितने अंश माप का कोण बना है ? ☐
- इस कोण का सर्वांगसम कोण घड़ी की सुइयों के बीच और कितने बजे बनता है ? ☐

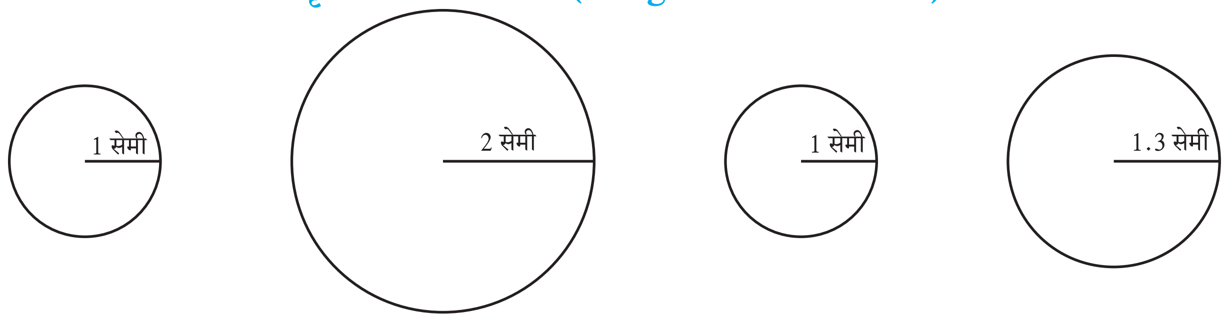
प्रश्नसंग्रह 7

⦿ नीचे कुछ कोणों की आकृतियाँ दी गई हैं। इनमें से सर्वांगसम कोणों की जोड़ियों को सर्वांगसमता चिह्न का उपयोग कर लिखो।



आओ, समझें

वृत्तों की सर्वांगसमता (Congruence of circles)



(a) (b) (c) (d)

कृति I उपर्युक्त आकृतियों में दर्शाए गए वृत्तों का निरीक्षण करो।
ऊपर की तरह 1 सेमी, 2 सेमी, 1 सेमी, 1.3 सेमी त्रिज्यावाले वृत्त एक कागज पर बना लो और प्रत्येक की वृत्ताकार आकृति काट लो। इन आकृतियों को एक दूसरे पर रखकर जाँचो कि कौन-सी आकृतियाँ हूबहू जुड़ती हैं ?

निरीक्षण : 1. आकृति (a) और आकृति (c) के वृत्त एक जैसे हैं।
2. आकृति (b) और आकृति (c) के वृत्त एक जैसे नहीं हैं। आकृति (a) और आकृति (d) के वृत्त एक जैसे नहीं हैं।
जो वृत्त एक दूसरे से हूबहू जुड़ते हैं, वे **सर्वांगसम वृत्त** कहलाते हैं।

कृति II भिन्न-भिन्न आकार की किंतु समान मोटाई की चूड़ियाँ लेकर पता लगाओ कि कौन-सी चूड़ियाँ सर्वांगसम हैं।

कृति III दैनिक व्यवहार में तुम्हें सर्वांगसम वृत्त कहाँ दिखाई देते हैं, पता करो।

कृति IV अपने घर की वृत्ताकार थालियाँ या कटोरियाँ लो। उनके किनारे एक साथ जोड़कर देखो कि कौन-से किनारे परस्पर सर्वांगसम हैं।

यह मैंने समझा

- जिन वृत्तों की त्रिज्याएँ समान होती हैं, वे वृत्त सर्वांगसम होते हैं।

ICT Tools or Links

Geogebra Software के Construction tools का उपयोग कर त्रिभुज और वृत्त बनाओ।

2 पूर्णांक संख्याओं का गुणा तथा भाग

आओ, थोड़ा याद करें

- पिछली कक्षा में हमने पूर्णांकों का जोड़ और घटाव सीखा है। उसका उपयोग करते हुए नीचे दिए गए रिक्त स्थानों की पूर्ति करो।

(1) $5 + 7 = \boxed{}$ (2) $10 + (-5) = \boxed{}$ (3) $-4 + 3 = \boxed{}$

(4) $(-7) + (-2) = \boxed{}$ (5) $(+8) - (+3) = \boxed{}$ (6) $(+8) - (-3) = \boxed{}$

- नीचे दी गई आकृति में प्रत्येक संक्रिया का उत्तर 3 मिले इस प्रकार से रिक्त कोष्ठकों में योग्य संख्या लिखो।

$(-6) + (\quad)$ $4 - (\quad)$ $7 + (\quad)$

3

$(-5) - (\quad)$ $-8 + (\quad)$ $9 - (\quad)$

आओ, समझें

पूर्णांक संख्याओं का गुणा

पाठशाला से घर जाते समय मयूरी की साइकिल पंक्चर हो गई। पंक्चर बनाने के लिए उसके पास पूरे पैसे नहीं थे। तब उसे सुशांत, स्नेहल और कल्पना प्रत्येक ने पाँच रुपये उधार दिए। उसके पास 15 रुपये जमा हो गए और उसकी साइकिल दुरुस्त हो गई। हम उधार रुपये या कर्ज को '–' (ऋण) चिह्न से दर्शाते हैं अर्थात मयूरी पर 15 रुपये का कर्ज था या उसके पास 15 रुपये थे।

यहाँ हमने $(-5) + (-5) + (-5) = -15$ यह पता किया।

इस प्रकार $(-5) \times 3 = 3 \times (-5) = -15$ हुआ।

दूसरे दिन मयूरी ने माँ से 15 रुपये लेकर प्रत्येक के रुपये वापस किए तथा कर्ज चुकाया या कम किया। कर्ज चुकाना अर्थात पैसे प्राप्त करना ध्यान दे कि $-(-15) = +15$

हमने पूर्ण संख्याओं का गुणा और भाग सीखा है। ये क्रियाएँ करने के लिए पहाड़े भी तैयार किए गए हैं। अब पूर्णांक संख्याओं का गुणा ज्ञात करो अर्थात ऋण संख्या, धन संख्या तथा शून्य संख्या मिलाकर जो समूह बनता है उन संख्याओं का गुणा देखेंगे।

$(-3) + (-3) + (-3) + (-3)$ का योगफल अर्थात (-3) यह संख्या 4 बार लेकर जोड़ी गई है और योगफल -12 मिलता है। यह योगफल हम $(-3) \times 4 = -12$ इस प्रकार लिख सकते हैं। उसी प्रकार $(-5) \times 6 = -30$, $(-7) \times 2 = -14$, $8 \times (-7) = -56$

अब हम (– 4) का पहाड़ा बनाएँगे।

(– 4) × 0 = 0
(– 4) × 1 = – 4
(– 4) × 2 = – 8
(– 4) × 3 = – 12

यहाँ ढाँचे का निरीक्षण करो। यहाँ (– 4) का गुणक एक इकाई से बढ़ने पर गुणनफल 4 से कम होता दिखाई देता है।

इसी ढाँचे को ऐसे ही रखकर (– 4) का पहाड़ा ऊपर की ओर तथा गुणक कम करके बढ़ाया तो इस प्रकार होगा।

(– 4) × (– 2) = 8
(– 4) × (– 1) = 4
(– 4) × 0 = 0

ध्यान रखो कि (– 4) का गुणक एक इकाई से कम होने पर गुणनफल 4 से बढ़ता है।

नीचे दी गई सारिणी में (– 5) का पहाड़ा दिया है। सारिणी में (– 6) तथा (– 7) का पहाड़ा पूर्ण करो।

(– 5) × (– 3) = 15	(– 6) × (– 3) =	(– 7) × (– 3) =
(– 5) × (– 2) = 10	(– 6) × (– 2) =	(– 7) × (– 2) =
(– 5) × (– 1) = 5	(– 6) × (– 1) =	(– 7) × (– 1) =
(– 5) × 0 = 0	(– 6) × 0 =	(– 7) × 0 =
(– 5) × 1 = – 5	(– 6) × 1 =	(– 7) × 1 =
(– 5) × 2 = – 10	(– 6) × 2 =	(– 7) × 2 =
(– 5) × 3 = – 15	(– 6) × 3 =	(– 7) × 3 =
(– 5) × 4 = – 20	(– 6) × 4 =	(– 7) × 4 =

मैंने यह समझा

- दो धन पूर्णांक संख्याओं का गुणनफल धन पूर्णांक संख्या होती है।
- एक धन पूर्णांक और एक ऋण पूर्णांक संख्या का गुणनफल ऋण पूर्णांक संख्या होती है।
- दो ऋण पूर्णांक संख्याओं का गुणनफल धनपूर्णांक संख्या होती है।

(धन संख्या) × (धन संख्या) = (धन संख्या)
(धन संख्या) × (ऋण संख्या) = (ऋण संख्या)
(ऋण संख्या) × (धन संख्या) = (ऋण संख्या)
(ऋण संख्या) × (ऋण संख्या) = (धन संख्या)

प्रश्नसंग्रह 8

⊙ गुणनफल ज्ञात करो। (गुणा करो।)

(i) (– 5) × (– 7) (ii) (– 9) × (6) (iii) (9) × (– 4) (iv) (8) × (– 7)

(v) (– 124) × (– 1) (vi) (– 12) × (– 7) (vii) (– 63) × (– 7) (viii)(–7) × (15)

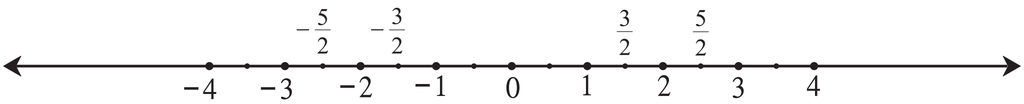
आओ, समझें

पूर्णांक संख्यांओं का भाग

किसी एक धन पूर्णांक संख्या को दूसरे धन पूर्णांक संख्या से भाग देने की संक्रिया हमें ज्ञात है। ऐसा भागफल पूर्णसंख्या या अपूर्णांक संख्या हो सकती है, यह भी हमें ज्ञात है।

जैसे, $6 \div 2 = \frac{6}{2} = 3, \quad 5 \div 3 = \frac{5}{3} = 1 + \frac{2}{3}$

संख्या रेखा पर शून्य की बाईं ओर ऋण पूर्णांक संख्या दर्शाते हैं। उसी प्रकार उनके भाग भी दिखा सकते हैं।



यहाँ संख्या रेखा पर $-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$ संख्याएँ दर्शाई गई हैं।

यह भी ध्यान रखो कि $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{3}{2}, \frac{-3}{2}\right), \left(\frac{-5}{2}, \frac{5}{2}\right)$ परस्पर विपरीत संख्याओं की जोड़ियाँ हैं।

अर्थात $\frac{1}{2} + \frac{-1}{2} = 0, \qquad \frac{3}{2} + \frac{(-3)}{2} = 0, \qquad \frac{5}{2} - \frac{5}{2} = 0$

विपरीत संख्याओं की जोड़ी को योगात्मक प्रतिलोम संख्याओं की जोड़ी भी कहते हैं।

$(-1) \times (-1) = 1$ यह हमने देखा है। इस समीकरण के दोनों पक्षों को (-1) से भाग देने पर $(-1) = \frac{1}{(-1)}$ यह समीकरण मिलेगा। अतः $\frac{1}{(-1)}$ का भागफल (-1) होगा, यह समझ लो।

इसी प्रकार $6 \times (-1) = 6 \times \frac{1}{(-1)} = \frac{6}{(-1)}$ यह समझ में आता है।

धन पूर्णांक संख्या को ऋण पूर्णांक संख्या से भाग देना

$$\frac{7}{-2} = \frac{7 \times 1}{(-1) \times 2} = 7 \times \frac{1}{(-1)} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{1} \times (-1) \times \frac{1}{2} = \frac{(7) \times (-1)}{2} = \frac{-7}{2}$$

ऋण पूर्णांक संख्या को ऋण पूर्णांक संख्या से भाग देना

$$\frac{-13}{-2} = \frac{(-1) \times 13}{(-1) \times 2} = \frac{(-1)}{(-1)} \times 13 \times \frac{1}{2} = (-1) \times \frac{(-1)}{1} \times \frac{13}{2} = 1 \times \frac{13}{2} = \frac{13}{2}$$

इसी प्रकार $\frac{-25}{-4} = \frac{25}{4}$, $\qquad \frac{-18}{-2} = \frac{18}{2} = 9$ आदि जाँच कर देखो।

इसी प्रकार ऋण पूर्णांक संख्याओं का भाग समझ में आता है।

यह संकेत है कि किसी एक पूर्णांक संख्या को दूसरी शून्येतर पूर्ण संख्या से भाग देने पर प्राप्त भागफल को लिखते समय अपूर्णांक संख्या का हर धन पूर्णांक संख्या होना चाहिए। इसलिए $\frac{7}{-2} = \frac{-7}{2}$, $\frac{-11}{-3} = \frac{11}{3}$ इस प्रकार लिखा जाता है।

मैंने यह समझा

पूर्णांक संख्याओं के भाग का नियम गुणा के नियमों के समान है।

- दो धन पूर्णांक संख्याओं का भागफल धनसंख्या होती है।
- दो ऋण पूर्णांक संख्याओं का भागफल धन संख्या होती है।
- धन पूर्णांक संख्या तथा ऋण पूर्णांक संख्या का भागफल सदैव ऋण पूर्णांक संख्या होती है।

प्रश्नसंग्रह 9

1. निम्नलिखित उदाहरण हल करो।

(i) $(-96) \div 16$ (ii) $98 \div (-28)$ (iii) $(-51) \div 68$ (iv) $38 \div (-57)$

(v) $(-85) \div 20$ (vi) $(-150) \div (-25)$ (vii) $100 \div 60$ (viii) $9 \div (-54)$

(ix) $78 \div 65$ (x) $(-5) \div (-315)$

2*. पूर्णांकों का उपयोग करते हुए ऐसे तीन भाग के प्रश्न तैयार करो जिनका उत्तर $\frac{24}{5}$ हो।

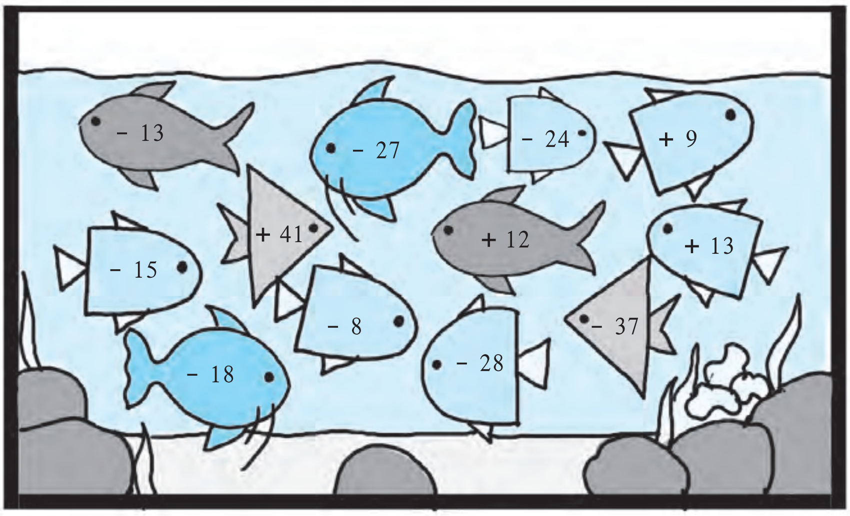
3*. पूर्णांकों का उपयोग करते हुए ऐसे तीन भाग के प्रश्न तैयार करो जिनका उत्तर $\frac{-5}{7}$ हो।

4. नीचे एक तालाब में संख्या धारण की हुई कुछ मछलियाँ हैं। कोई 4 जोड़ियाँ लेकर उन संख्याओं का गुणा तैयार करो। उसी प्रकार अन्य चार जोड़ियाँ लेकर उन संख्याओं का भागकार तैयार करो।

उदाहरणार्थ :

1. $(-13) \times (-15) = 195$

2. $(-24) \div 9 = \frac{-24}{9} = \frac{-8}{3}$



3 मसावि–लसावि

आओ, थोड़ा याद करें

- सबसे छोटी अभाज्य संख्या (prime number) कौन–सी है ?
- 1 से 50 तक की संख्याओं में कितनी अभाज्य संख्या (मूल संख्या) हैं ? उनकी सूची बनाओ।
- नीचे दी गई संख्याओं में से अभाज्य संख्या के चारों ओर गोल बनाओ।

  17, 15, 4, 3, 1, 2, 12, 23, 27, 35, 41, 43, 58, 51, 72, 79, 91, 97

  सहअभाज्य संख्या (Coprime numbers) : जिन दो संख्याओं का सामान्य विभाजक सिर्फ 1 हो उन्हें **सहअभाज्य संख्या** कहते हैं। सहअभाज्य संख्या को **सापेक्ष मूल संख्या** (relatively prime numbers) भी कहते हैं।

जैसे : 10 तथा 21 सहअभाज्य संख्या हैं। 10 के विभाजक : 1, 2, 5, 10 और 21 के विभाजक 1, 3, 7, 21 हैं। दोनों संख्याओं के विभाजकों में संख्या 1 ही सामान्य विभाजक है। (3, 8) ; (4, 9); (21, 22) ; (22, 23) ; (23, 24) सहअभाज्य संख्याएँ हैं। दो क्रमिक संख्या सहअभाज्य संख्या होती हैं, इसकी जाँच करो।

आओ, समझें

अभाज्य युग्म संख्या (Twin prime numbers)

जिन दो अभाज्य संख्याओं में 2 का अंतर हो उन दो अभाज्य संख्याओं को 'अभाज्य युग्म संख्या' कहते हैं।

जैसे : (3, 5) ; (5, 7) ; (11, 13) ; (29, 31) आदि

प्रश्नसंग्रह 10

1. वह संख्या बताओ जो न विभाज्य और न अभाज्य है।
2. नीचे दी गई जोड़ियों में सहअभाज्य संख्याओं की जोड़ियाँ पहचानो।

   (i) 8, 14 (ii) 4, 5 (iii) 17, 19 (iv) 27, 15
3. 25 से 100 तक की सभी अभाज्य संख्याओं की सूची तैयार करो। कितनी है लिखो।
4. 51 से 100 तक की सभी अभाज्य युग्म संख्याएँ लिखो।
5. 1 से 50 के बीच की सहअभाज्य संख्याओं की कोई 5 जोड़ियाँ लिखो।
6. अभाज्य संख्याओं में समअभाज्य संख्या कौन–सी हैं, लिखो।

आओ, समझें

अभाज्य संख्या के गुणनखंड ज्ञात करना (Prime factorisation of a number)

संख्याओं के लसावि तथा मसावि ज्ञात करने के लिए युक्लिड का एक आसान और महत्वपूर्ण नियम कई बार उपयोग में लाया जाता है। इस नियम के अनुसार "**कोई भी संयुक्त संख्या (विभाज्य संख्या) यह अभाज्य संख्याओं के गुणनफल के रूप में लिखी जा सकती है**।"

अब देखेंगे कि संख्याओं के अभाज्य गुणनखंड कैसे ज्ञात करते हैं।

उदा. संख्या 24 को अभाज्य गुणनखंडों के गुणा के रूप में लिखो।

अभाज्य गुणनखंड ज्ञात करने की विधि

उर्ध्वाधर विधि

2	24
2	12
2	6
3	3
	1

$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$

क्षैतिज विधि

$24 = 2 \times 12$

$= 2 \times 2 \times 6$ ...12 के गुणनखंड किए

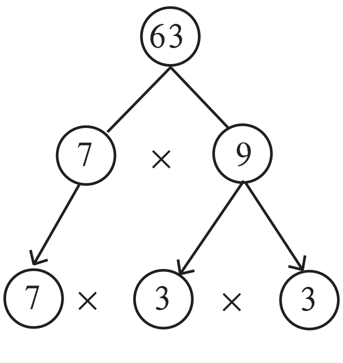
$= 2 \times 2 \times 2 \times 3$ ...6 के गुणनखंड किए

2 तथा 3 अभाज्य गुणनखंड हैं।

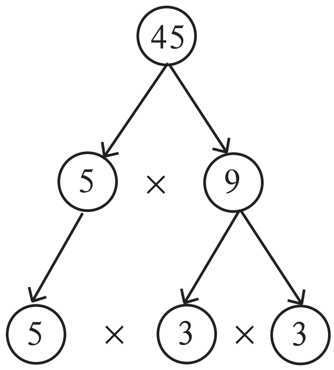
> **ध्यान दो :**
> **दी गई संख्या को उसके अभाज्य गुणनखंड के गुणनफल के रूप में लिखना ही उस संख्या के अभाज्य गुणनखंड ज्ञात करना है।**

उदा. नीचे दी गई संख्या को उसके अभाज्य गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में लिखो।

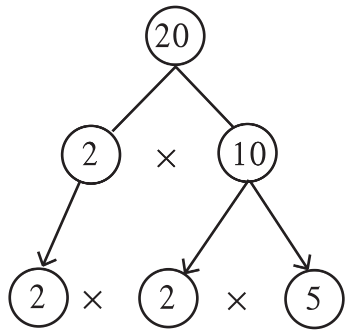
हल :



$63 = 7 \times 3 \times 3$



$45 = 5 \times 3 \times 3$



$20 = 2 \times 2 \times 5$

उदा. संख्या 117 के अभाज्य गुणनखंड ज्ञात करो।

हल :

3	117
3	39
13	13
	1

$117 = 13 \times 9$

$= 13 \times 3 \times 3$

$117 = 3 \times 3 \times 13$

उदा. संख्या 250 के अभाज्य गुणनखंड ज्ञात करो।

हल :

2	250
5	125
5	25
5	5
	1

$250 = 2 \times 125$

$= 2 \times 5 \times 25$

$= 2 \times 5 \times 5 \times 5$

$250 = 2 \times 5 \times 5 \times 5$

उदा. संख्या 40 के अभाज्य गुणनखंड ज्ञात करो।

हल : **उर्ध्वाधर विधि**

$$\begin{array}{c|c} 2 & 40 \\ \hline 2 & 20 \\ \hline 2 & 10 \\ \hline 5 & 5 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5$

क्षैतिज विधि

$$\begin{aligned} 40 &= 10 \times 4 \\ &= 5 \times 2 \times 2 \times 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 40 &= 8 \times 5 \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 5 \end{aligned}$$

प्रश्नसंग्रह 11

⦿ नीचे दी गई संख्याओं के अभाज्य गुणनखंड ज्ञात करो।

(i) 32 (ii) 57 (iii) 23 (iv) 150 (v) 216

(vi) 208 (vii) 765 (viii) 342 (ix) 377 (x) 559

आओ, थोड़ा याद करें

महत्तम सामान्य विभाजक (मसावि)

[Greatest Common Divisor (GCD) or Highest Common Factor (HCF)]

हमने धन पूर्णांक संख्याओं के मसावि और लसावि का अभ्यास किया है। अब उनका और थोड़ा अधिक अभ्यास करेंगे।

दी गई संख्याओं के सामान्य विभाजकों में से सबसे बड़ी संख्या ही मसावि होती है।

नीचे दिए गए उदाहरणों में दी गई संख्याओं के सभी विभाजक लिखकर मसावि ज्ञात करो।

(i) 28, 42 (ii) 51, 27 (iii) 25, 15, 35

आओ, समझें

अभाज्य गुणनखंड पद्धति : अभाज्य गुणनखंड ज्ञात कर संख्याओं का मसावि ज्ञात करना आसान होता है।

उदा. अभाज्य गुणनखंड पद्धति से 24 तथा 32 का मसावि ज्ञात करो।

$$\begin{array}{c|c} 2 & 24 \\ \hline 2 & 12 \\ \hline 2 & 6 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 24 &= 4 \times 6 \\ &= \underline{2} \times \underline{2} \times \underline{2} \times 3 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c|c} 2 & 32 \\ \hline 2 & 16 \\ \hline 2 & 8 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 32 &= 8 \times 4 \\ &= \underline{2} \times \underline{2} \times \underline{2} \times 2 \times 2 \end{aligned}$$

प्रत्येक संख्या में सामान्य गुणनखंड 2 यह 3 बार आया है । अतः मसावि $= 2 \times 2 \times 2 = 8$

उदा. संख्याएँ 195, 312 तथा 546 का मसावि ज्ञात करो।

हल :

$195 = 5 \times 39$	$312 = 4 \times 78$	$546 = 2 \times 273$
$= 5 \times \underline{3} \times \underline{13}$	$= 2 \times 2 \times 2 \times 39$	$= 2 \times 3 \times 91$
	$= 2 \times 2 \times 2 \times \underline{3} \times \underline{13}$	$= 2 \times \underline{3} \times 7 \times \underline{13}$

प्रत्येक संख्या में 3 तथा 13 सामान्य गुणनखंड एक ही बार आया है।

$\therefore$ मसावि $= 3 \times 13 = 39$

उदा. संख्याएँ 10, 15 तथा 12 का मसावि ज्ञात करो।

हल : $10 = 2 \times 5$ $\quad$ $15 = 3 \times 5$ $\quad$ $12 = 2 \times 2 \times 3$

इन संख्याओं के गुणनखंड में कोई भी अभाज्य संख्या सामान्य नहीं है । 1 यह एक ही समान्य विभाजक है। इसलिए मसावि = 1

उदा. संख्याएँ 60, 12 एवं 36 का मसावि ज्ञात करो।

हल :

$60 = 4 \times 15$	$12 = 2 \times 6$	$36 = 3 \times 12$
$= \underline{2} \times \underline{2} \times \underline{3} \times 5$	$= \underline{2} \times \underline{2} \times \underline{3}$	$= 3 \times 3 \times 4$
		$= \underline{2} \times \underline{2} \times \underline{3} \times 3$

$\therefore$ मसावि $= 2 \times 2 \times 3 = 12$

इसी उदाहरण को उर्ध्वाधर विधि से हल करेंगे। एक ही साथ सभी संख्या लिखकर अभाज्य गुणनखंड ज्ञात करेंगे।

2	60	12	36
2	30	6	18
3	15	3	9
	5	1	3

$\therefore$ मसावि $= 2 \times 2 \times 3 = 12$

ध्यान दो कि संख्या 12 यह 36 तथा 60 की विभाजक है।

यह मैंने समझा

- दी गई संख्याओं में से एक संख्या अन्य संख्याओं की विभाजक हो तो वह संख्या दी गई संख्याओं का मसावि होती है।
- दी गई संख्याओं के अभाज्य गुणनखंडों में एक भी अभाज्य संख्या सामान्य न हो तो उन संख्याओं का मसावि 1 होता है क्योंकि 1 उन संख्याओं का सामान्य विभाजक है।

✻ अधिक जानकारी हेतु

दो क्रमिक सम संख्याओं का मसावि 2 होता है। दो क्रमिक विषम संख्याओं का मसावि 1 होता है। विविध उदाहरण लेकर इन नियमों की जाँच करो।

भाग विधि से मसावि ज्ञात करना

उदा. संख्या 144 तथा 252 का मसावि ज्ञात करो।

```
144)252( 1
   -144
   108)144( 1
       -108
         36)108(3
           -108
           ----
            000
```

(1) बड़ी संख्या को छोटी संख्या से भाग दो।

(2) चरण 1 के इस भाग विधि में मिलने वाले शेषफल से भाजक को भाग दो।

(3) चरण 2 में मिलने वाले शेषफल से चरण 2 के भाजक को भाग दो तथा शेषफल ज्ञात करो।

(4) इसी प्रकार शेषफल शून्य आने तक क्रिया करो।
जिस भाग विधि में शेषफल शून्य मिले उस भाग विधि का भाजक ही दी गई संख्याओं का मसावि है।

$\therefore$ 144 तथा 252 का मसावि = 36

उदा. संख्या $\frac{209}{247}$ को संक्षिप्त रूप दो।

हल : संक्षिप्त रूप देने के लिए दोनों संख्याओं का सामान्य गुणनखंड ज्ञात करते हैं। इसके लिए भाग विधि से 209 तथा 247 का मसावि ज्ञात करते हैं। यहाँ पर 19 मसावि है अर्थात अंश तथा हर के स्थान की संख्याओं को 19 से विभाजित कर सकते हैं।

```
209)247 ( 1
   -209
    38)209 (5
      -190
       19)38(2
         -38
         ---
          00
```

$$\therefore \frac{209}{247} = \frac{209 \div 19}{247 \div 19} = \frac{11}{13}$$

प्रश्नसंग्रह 12

1. मसावि ज्ञात करो।

(i) 25, 40 (ii) 56, 32 (iii) 40, 60, 75 (iv) 16, 27
(v) 18, 32, 48 (vi) 105, 154 (vii) 42, 45, 48 (viii) 57, 75, 102
(ix) 56, 57 (x) 777, 315, 588

2. भाग विधि से मसावि ज्ञात करके संक्षिप्त रूप दो।

(i) $\frac{275}{525}$ (ii) $\frac{76}{133}$ (iii) $\frac{161}{69}$

आओ, थोड़ा याद करें

लघुत्तम सामान्य विभाजक (लसावि) [Least common multiple (LCM)]

दी गई संख्याओं में प्रत्येक संख्या से विभाजित होने वाली छोटी-से-छोटी संख्या ही उन संख्याओं का लसावि होती है।

- नीचे दी गई संख्याओं के पहाड़े लिखकर उनका लसावि ज्ञात करो।

(i) 6, 7 (ii) 8, 12 (iii) 5, 6, 15

आओ, समझें

उदा. संख्या 60 तथा 48 का लसावि ज्ञात करो।

हल : पहले प्रत्येक संख्या के अभाज्य गुणनखंड ज्ञात करेंगे।

$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$ $\qquad$ $48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$

उपर्युक्त गुणनफल में आनेवाली प्रत्येक अभाज्य संख्या देखते हैं।

2 यह संख्या अधिक-से-अधिक 4 बार हैं। (48 के गुणनखंड में)

3 यह संख्या अधिक-से-अधिक 1 बार हैं। (60 के गुणनखंड में)

5 यह संख्या अधिक-से-अधिक 1 बार हैं। (60 के गुणनखंड में)

$\therefore$ लसावि $= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 10 \times 24 = 240$

उदा. संख्या 18, 30 तथा 50 का लसावि ज्ञात करते हैं।

हल :

$18 = 2 \times 9$	$30 = 2 \times 15$	$50 = 2 \times 25$
$= 2 \times 3 \times 3$	$= 2 \times 3 \times 5$	$= 2 \times 5 \times 5$

ऊपर दिए गए गुणनफल में अभाज्य संख्याएँ 2, 3 तथा 5 हैं।

संख्या 2 यह अधिकतम $\square$ बार, संख्या 3 यह अधिकतम $\square$ बार तथा संख्या 5 यह संख्या अधिकतम $\square$ बार आई है।

$\therefore$ लसावि $= 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 = 450$ $\qquad$ $\therefore$ 18, 30, 50 का लसावि 450 है।

उदा. संख्या 16, 28 तथा 40 का लसावि ज्ञात करो।

हल : उर्ध्वाधर विधि

2	16	28	40
2	8	14	20
2	4	7	10
	2	7	5

- विभाजक कसौटियों का उपयोग कर सभी संख्याओं को भाग जाने वाली संख्या ज्ञात करो और उससे दी गई संख्याओं को भाग दो। भाग से प्राप्त होनेवाली संख्याओं पर भी इसी विधि से जब तक संभव हो क्रिया करो।
- अब प्राप्त संख्याओं में कम-से-कम दो संख्याओं को विभाजित करने वाली संख्या ढूँढ़कर जिस संख्या से भाग जाता हैं उससे भाग दो। जिस संख्या में भाग नहीं जाता उसे वैसा ही रखो। जब तक संभव हो यह क्रिया करो।
- 1 के अलावा सामान्य विभाजक न मिलने पर भाग देना रोक दो।
- बाई ओर के स्तंभ की संख्याओं का गुणनफल ज्ञात करो। उसे सबसे नीचे की आड़ी कतार की संख्याओं से गुणा करो।

$\therefore$ लसावि $= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 7 = 560$

उदा. संख्या 18 तथा 30 का लसावि तथा मसावि ज्ञात करो। उनके गुणनफल तथा दी गई संख्याओं के गुणनफल की तुलना करो।

2	18	30
3	9	15
	3	5

मसावि $= 2 \times 3 = 6$

लसावि $= 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 90$

मसावि $\times$ लसावि $= 6 \times 90 = 540$

दी गई दो संख्याओं का गुणनफल $= 18 \times 30 = 540$

दी गई दो संख्याओं का गुणनफल = मसावि $\times$ लसावि

इसमें यह दिखाई देता हैं कि दो संख्याओं का गुणनफल उन दो संख्याओं के मसावि तथा लसावि के गुणनफल के बराबर होता है। इस विधान की जाँच करने के लिए नीचे दी गई संख्याओं की जोड़ियाँ लो।

(15, 48), (14, 63), (75, 120)

उदा . संख्या 15, 45 तथा 105 का लसावि तथा मसावि ज्ञात करो।

हल :

3	15	45	105
5	5	15	35
	1	3	7

$15 = \underline{3} \times \underline{5}$

$45 = \underline{3} \times 3 \times \underline{5}$

$105 = \underline{3} \times \underline{5} \times 7$

मसावि $= 3 \times 5 = 15$

लसावि $= 3 \times 3 \times 5 \times 7 = 315$

उदा. किन्हीं दो अंकी दो संख्यांओं का गुणनफल 1280 है। यदि उनका मसावि 4 हो तो लसावि ज्ञात करो।

हल : मसावि $\times$ लसावि = दी गई संख्याओं का गुणनफल

$4 \times$ लसावि $= 1280$

$\therefore$ लसावि $= \dfrac{1280}{4} = 320$

प्रश्नसंग्रह 13

1. लसावि ज्ञात करो।

(i) 12, 15 (ii) 6, 8, 10 (iii) 18, 32 (iv) 10, 15, 20 (v) 45, 86

(vi) 15, 30, 90 (vii) 105, 195 (viii) 12, 15, 45 (ix) 63, 81

(x) 18, 36, 27

2. नीचे दी गई संख्याओं का मसावि तथा लसावि ज्ञात करो। क्या उनका गुणनफल दी गई संख्याओं के गुणनफल के बराबर है, इसकी जाँच करो।

(i) 32, 37 (ii) 46, 51 (iii) 15, 60 (iv) 18, 63 (v) 78, 104

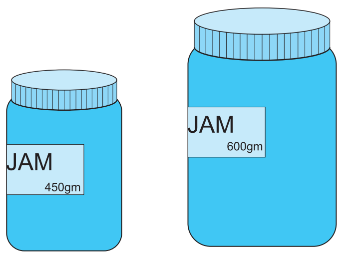
लसावि तथा मसावि का उपयोग

उदा. किसी दुकान में 450 ग्राम जैम की छोटी बोतल का मूल्य 96 रुपये है। उसी जैम के 600 ग्राम वजन वाली बड़ी बोतल का मूल्य 124 रुपये हैं तो बताओ कौन-सी बोतल लेना फायदेमंद होगा ?

हल : हमने ऐकिक नियम की विधि समझी है। उसके अनुसार प्रत्येक बोतल के 1 ग्राम जैम का मूल्य ज्ञात कर उनकी तुलना कर सकते हैं। छोटा सामान्य गुणनखंड लेने की बजाय बड़ा सामान्य गुणनखंड लिया जाए तो गणना आसान होती है।

450 तथा 600 का मसावि 150 हैं, इसका उपयोग करेंगे।

$450 = 150 \times 3,$ $600 = 150 \times 4$



$\therefore$ 150 ग्राम जैम वाली छोटी बोतल का मूल्य $\frac{96}{3}$ = 32 रुपये

150 ग्राम जैम वाली बड़ी बोतल का मूल्य $\frac{124}{4}$ = 31 रुपये

$\therefore$ 600 ग्राम जैम वाली बोतल खरीदना फायदेमंद होगा।

उदा. योगफल ज्ञात करो $\frac{17}{28} + \frac{11}{35}$

विधि 1 : योगफल ज्ञात करने के लिए सर्वप्रथम हर समान करेंगे।

हल : $\frac{17}{28} + \frac{11}{35} = \frac{17\times35+11\times28}{28\times35} = \frac{595+308}{28\times35} = \frac{903}{28\times35} = \frac{903}{980} = \frac{129}{140}$

विधि 2 : योगफल ज्ञात करने के लिए 28 तथा 35 का लसावि ज्ञात करेंगे।

हल : लसावि = 7 × 4 × 5 = 140

$$\frac{17}{28} + \frac{11}{35} = \frac{17\times5}{28\times5} + \frac{11\times4}{35\times4} = \frac{85+44}{140} = \frac{129}{140}$$

संख्या के हर का गुणनफल ज्ञात करने की बजाय उनका लसावि ज्ञात करने से गणना आसान होती है !

उदा. किसी संख्या को क्रमशः 8, 10, 12, 14 इन संख्याओं से भाग देने पर हर बार 3 शेष बचता है तो वह छोटी-सी छोटी संख्या कौन-सी है ?

2	8	10	12	14
2	4	5	6	7
	2	5	3	7

हल : भाज्य संख्या ज्ञात करने के लिए भाजक संख्याओं का लसावि ज्ञात करेंगे।

लसावि = 2 × 2 × 2 × 5 × 3 × 7 = 840

प्राप्त लसावि में हर बार शेष बचने वाली संख्या जोड़ देते हैं।

वह संख्या = लसावि + शेष = 840 + 3 = 843

उदा. संख्याएँ 16,20,80 का लसावि ज्ञात करो।

4	16	20	80
4	4	5	20
5	1	5	5
	1	1	1

हल : 16 = 2 × 2 × 2 × 2

20 = 2 × 2 × 5

80 = 2 × 2 × 2 × 2 × 5

लसावि = 4 × 4 × 5 = 80

यहाँ मजेदार बात यह है कि 80 यह दी गई संख्याओं में से ही है।

अन्य संख्या 16 तथा 20 उसके विभाजक हैं।

ध्यान दो :

यदि दी गई संख्याओं में से सबसे बड़ी संख्या की विभाजक अन्य संख्याएँ हो तो वह बड़ी संख्या दी गई संख्याओं की लसावि होती है।

इस नियम के प्रतिपादन हेतु (18,90) (35,140,70) संख्यासमूहों की जाँच करो।

उदा. श्रेयस, शलाका और स्नेहल एक ही वृत्ताकार दौड़पट्टी पर एक ही स्थान से एक ही समय दौड़ना प्रारंभ करते हैं। वे वृत्ताकार दौड़पट्टी का एक चक्कर क्रमशः 16, 24 तथा 18 मिनिट में तय करते हैं तो कम-से-कम कितने समय बाद तीनों प्रारंभिक स्थान पर एक ही समय मिलेंगे ?

हल: जिस समय वे एक साथ मिलेंगे, वह समय 16, 24, तथा 18 की गुणावाली संख्या में होगा। वह समय कम-से-कम कितना होगा यह ज्ञात करने के लिए लसावि निकालेंगे।

$16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$ $\quad$ $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$ $\quad$ $18 = 2 \times 3 \times 3$

लसावि $= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 144$

वे तीनों 144 मिनिट या 2 घंटे 24 मिनिट बाद एक साथ मिलेंगे।

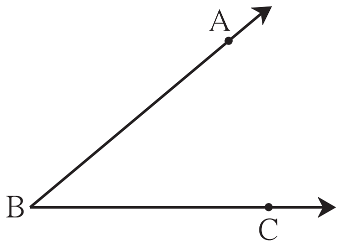
प्रश्नसंग्रह 14

1. उचित पर्याय चुनकर वाक्य पूर्ण लिखो।
   (i) 120 तथा 150 का मसावि .... होगा।
   (1) 30 (2) 45 (3) 20 (4) 120
   (ii) निम्नलिखित में से किन दो संख्याओं का मसावि 1 नहीं हैं ?
   (1) 13, 17 (2) 29, 20 (3) 40, 20 (4) 14, 15
2. मसावि तथा लसावि ज्ञात करो।
   (i) 14, 28 (ii) 32, 16 (iii) 17, 102, 170 (iv) 23, 69 (v) 21, 49, 84
3. लसावि ज्ञात करो।
   (i) 36, 42 (ii) 15, 25, 30 (iii) 18, 42, 48 (iv) 4, 12, 20 (v) 24, 40, 80, 120
4. किसी एक संख्या को 8, 9, 10, 15, 20 इन संख्याओं से भाग देने पर हर बार शेषफल 5 आता हैं तो वह छोटी-से-छोटी संख्या कौन-सी होगी ?
5. $\frac{348}{319}$, $\frac{221}{247}$, $\frac{437}{551}$ इन अपूर्णांकों को संक्षिप्त रूप दो।
6. किसी दो संख्याओं का लसावि तथा मसावि क्रमशः 432 तथा 72 है। उन दो संख्यांओं में से एक संख्या 216 हो तो दूसरी संख्या ज्ञात करो।
7. किसी दो अंकी दो संख्याओं का गुणनफल 765 और उनका मसावि 3 हो तो उनका लसावि ज्ञात करो।
8. किसी विक्रेता के पास 392 मीटर, 308 मीटर, 490 मीटर लंबाई वाले प्लास्टिक रस्सियों के तीन बंडल हैं। रस्सी शेष न रहे इस प्रकार से तीनों ही बंडल की रस्सियों के समान लंबाई वाले टुकड़े किए गए तो बताओ प्रत्येक टुकड़े की अधिकतम लंबाई कितनी हो सकती है ?

9*. दो क्रमिक सम संख्याओं का लसावि 180 हो तो वे संख्याएँ कौन-सी हैं ?

4 कोण तथा कोणों की जोड़ियाँ

आओ, थोड़ा याद करें

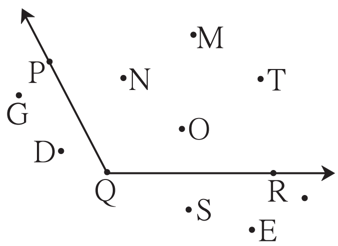


- संलग्न आकृति में बने कोण का नाम लिखो। ....
- कोण के शीर्षबिंदु का नाम लिखो। ....
- कोण की भुजाओं का नाम लिखो। ....
- भुजाओं पर दर्शाए गए बिंदुओं के नाम लिखो। ....

आओ, समझें

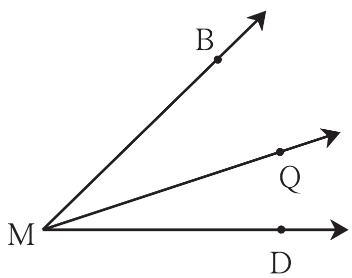
कोण का अंत:भाग और बाह्यभाग

संलग्न आकृति में प्रतल में बने कोण की भुजाओं के बिंदुओं के अतिरिक्त बिंदु N, बिंदु M, बिंदु T जैसे बिंदुओं का समूह ∠PQR का **अंत:भाग** है। (Interior of an angle)



प्रतल के जो बिंदु कोण की भुजाओं तथा कोण के अंत:भाग के बिंदु न हो ऐसे बिंदु G, बिंदु D, बिंदु E जैसे बिंदुओं का समूह ∠PQR का **बाह्यभाग** है। (Exterior of an angle)

संलग्न कोण (आसन्न कोण) (Adjacent angles)



संलग्न आकृति देखो। किरण MQ, यह ∠BMQ तथा ∠QMD की एक सामान्य भुजा है जिस का बिंदु M सामान्य शीर्षबिंदु है। इन कोणों के अंत:भाग में एक भी बिंदु सामान्य नहीं है। वे एक दूसरे के बगल में हैं। ऐसे कोणों को संलग्न कोण कहते हैं।

संलग्न कोणों की एक भुजा सामान्य होकर शेषभुजाएँ सामान्य भुजा की विपरीत दिशाओं में होती हैं। उनका शीर्षबिंदु सामान्य होता है। संलग्न कोणों के अंत:भाग अलग-अलग होते हैं।

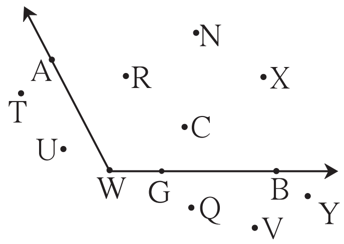
उपर्युक्त आकृति में किरण MB यह ∠BMD तथा ∠BMQ की सामान्य भुजा है परंतु वे संलग्न कोण नहीं हैं क्योंकि उनके अंत:भाग अलग-अलग नहीं हैं।

यह मैंने समझा

जिन दो कोणों का शीर्षबिंदु और एक भुजा सामान्य हो एवं उनके अंतःभाग भिन्न हो, ऐसे कोणों को संलग्न कोण कहते हैं।

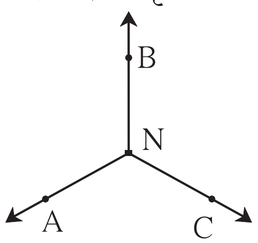
प्रश्नसंग्रह 15

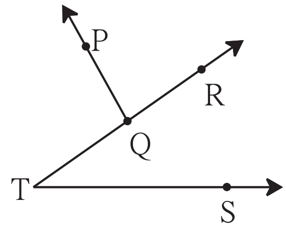
1. नीचे दी गई आकृति का निरीक्षण करो और दी गई $\angle AWB$ के लिए तालिका पूर्ण करो।



अंतःभाग में स्थित बिंदुओं के नाम	
बाह्यभाग में स्थित बिंदुओं के नाम	
कोण की भुजाओं पर स्थित बिंदुओं के नाम	

2. नीचे दी गई आकृतियों में बनी संलग्न कोणों की जोड़ियाँ लिखो।

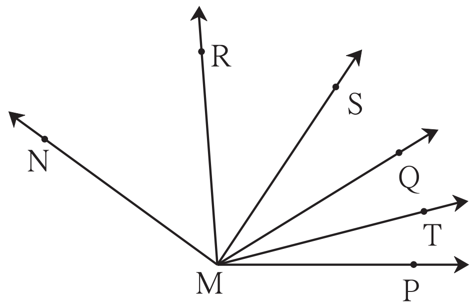




3. कोणों की निम्नलिखित जोड़ियाँ संलग्न हैं क्या ?
   यदि नहीं तो कारण लिखो।

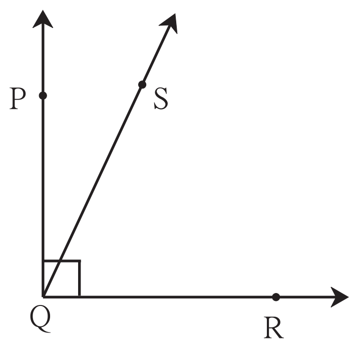
   (i) $\angle PMQ$ तथा $\angle RMQ$ (ii) $\angle RMQ$ तथा $\angle SMR$

   (iii) $\angle RMS$ तथा $\angle RMT$ (iv) $\angle SMT$ तथा $\angle RMS$



आओ, समझें

कोटिपूरक कोण (Complementary angles)

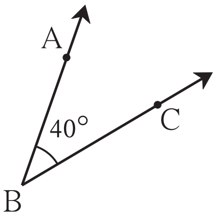


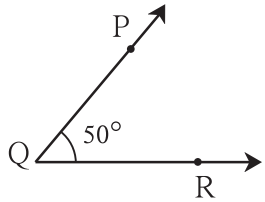
- समकोण $\angle PQR$ बनाओ।
- उसके अंतःभाग में बिंदु S लो।
- किरण QS खींचो।
- $\angle PQS$ तथा $\angle SQR$ के मापों का योग ज्ञात करो।
- योगफल कितना मिलेगा ?

जिन दो कोणों के मापों का योगफल 90° हो उन कोणों को एक-दूसरे का कोटिपूरक कोण कहते हैं।

यहाँ $\angle PQS$ तथा $\angle SQR$ परस्पर कोटिपूरक कोण हैं।

उदा. आकृति में बने कोणों का निरीक्षण करो तथा चौखट में उचित संख्या लिखो।





$m\angle ABC = \boxed{\quad}^\circ$

$m\angle PQR = \boxed{\quad}^\circ$

$m\angle ABC + m\angle PQR = \boxed{\quad}^\circ$

$\angle ABC$ तथा $\angle PQR$ के मापों का योग 90° है अतः वे परस्पर कोटिपूरक कोण हैं।

उदा. 70° मापवाले कोण के कोटिपूरक कोण का माप कितना होगा ?

हल : मानो, कि दिए गए कोण के कोटिपूरक कोण का माप x

$70 + x = 90$

$\therefore\ 70 + x - 70 = 90 - 70$

$x = 20^\circ$

यहाँ 70° मापवाले कोण के कोटिपूरक कोण का माप 20° है।

उदा. $(a + 15)^\circ$ एवं $(2a)^\circ$ परस्पर कोटिपूरक कोणों के माप हैं तो प्रत्येक कोण का माप कितना होगा ?

हल : $a + 15 + 2a = 90$

$3a + 15 = 90$

$3a = 75$

$a = 25$

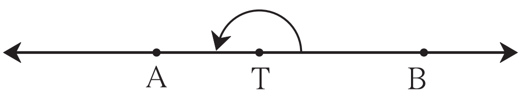
$\therefore\ a + 15 = 25 + 15 = 40^\circ$

तथा $2a = 2 \times 25 = 50^\circ$

प्रश्नसंग्रह 16

1. नीचे दिए गए कोणों के कोटिपूरक कोणों के माप लिखो।
   (i) 40° (ii) 63° (iii) 45° (iv) 55° (v) 20° (vi) 90° (vii) x°
2. $(y - 20)^\circ$ तथा $(y + 30)^\circ$ ये परस्पर कोटिपूरक कोणों के माप हों तो प्रत्येक कोण का माप ज्ञात करो।

आओ, थोड़ा याद करें

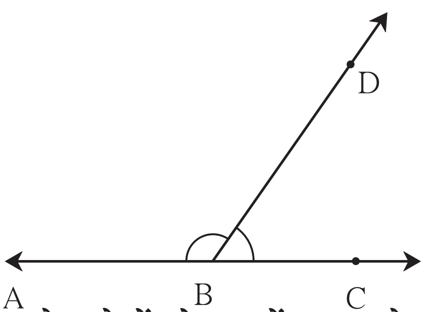


रेखा AB पर T एक बिंदु है।

- $\angle ATB$ किस प्रकार का कोण है ?
- उसका माप कितना है ?

आओ, समझें

संपूरक कोण (Supplementary angles)

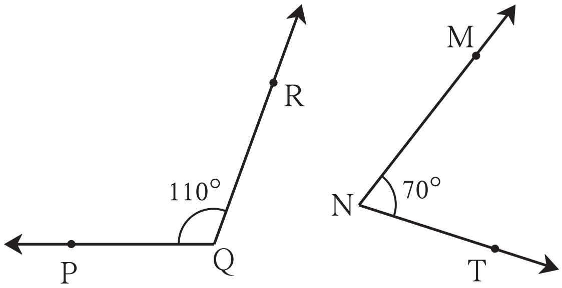


- संलग्न आकृति में रेखा AC दी गई है। रेखा पर स्थित बिंदु B से किरण BD खींची गई है। यहाँ कितने कोण हैं ? (निम्न कोणों को कोण मापक की सहायता से मापो।)
- $m\angle ABD = \boxed{\quad}^\circ$, $m\angle DBC = \boxed{\quad}^\circ$
- $m\angle ABD + m\angle DBC = \boxed{\quad}^\circ$

जिन दो कोणों के मापों का योगफल 180° हो उन्हें एक-दूसरे का संपूरक कोण कहते हैं।

यहाँ $\angle ABD$ तथा $\angle DBC$ परस्पर संपूरक कोण हैं।

उदा. नीचे दी गई आकृतियों में कोणों का निरीक्षण करो तथा चौखट में उचित संख्या लिखो।



- $m\angle PQR = \square^\circ$ $m\angle MNT = \square^\circ$
- $m\angle PQR + m\angle MNT = \square^\circ$

$\angle PQR$ तथा $\angle MNT$ परस्पर संपूरक कोण हैं।

उदा. 135° माप वाले कोण के संपूरक कोण का माप ज्ञात करो।

हल : संपूरक कोण का माप p° मानो।

संपूरक कोणों के मापों का योग 180° होता है।

$$135 + p = 180$$

$$\therefore 135 + p - 135 = 180 - 135$$

$$\therefore p = 45$$

$\therefore$ 135° माप वाले कोण के संपूरक कोण का माप 45° है।

उदा. $(a + 30)^\circ$ तथा $(2a)^\circ$ परस्पर संपूरक कोणों के माप हों तो प्रत्येक कोण का माप कितना होगा ?

हल : $a + 30 + 2a = 180$

$$\therefore 3a = 180 - 30$$

$$\therefore 3a = 150$$

$$\therefore a = 50$$

$$\therefore a + 30 = 50 + 30 = 80^\circ$$

$$\therefore 2a = 2 \times 50 = 100^\circ$$

$\therefore$ उन कोणों का माप 80° तथा 100° हैं।

प्रश्नसंग्रह 17

1. नीचे दिए गए कोणों के संपूरक कोणों के माप लिखो।
   (i) 15° (ii) 85° (iii) 120° (iv) 37° (v) 108° (vi) 0° (vii) a°
2. नीचे कुछ कोणों के माप दिए गए हैं। उनमें से संपूरक कोण तथा कोटिपूरक कोण की जोड़ियाँ बनाओ।
   $m\angle B = 60^\circ$ $m\angle N = 30^\circ$ $m\angle Y = 90^\circ$ $m\angle J = 150^\circ$
   $m\angle D = 75^\circ$ $m\angle E = 0^\circ$ $m\angle F = 15^\circ$ $m\angle G = 120^\circ$
3. ΔXYZ में $m\angle Y = 90^\circ$ तो $\angle X$ तथा $\angle Z$ में किस प्रकार का संबंध होगा, बताओ ?
4. कोटिपूरक कोणों की जोड़ी के मापों में 40° का अंतर हो तो प्रत्येक कोण का माप ज्ञात करो।
5. $\square PTNM$ आयत है। इस आकृति में बने संपूरक कोणों की जोड़ियों के नाम लिखो।

6*. यदि $m\angle A = 70^\circ$ तो $\angle A$ के कोटिपूरक कोण के संपूरक कोण का माप कितना होगा ?

7. $\angle A$ तथा $\angle B$ परस्पर संपूरक कोण हैं और $m\angle B = (x + 20)^\circ$ तो $m\angle A = ?$

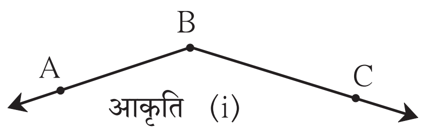
आओ, चर्चा करें

निम्नलिखित विधानों की चर्चा करो। विधान सही हो तो उदाहरण दो। विधान गलत होने पर कारण बताओ।

- दो न्यूनकोण परस्पर कोटिपूरक कोण हो सकते हैं।
- दो समकोण परस्पर कोटिपूरक कोण हो सकते हैं।
- एक न्यूनकोण तथा एक अधिककोण परस्पर कोटिपूरक कोण हो सकते हैं।
- दो न्यूनकोण परस्पर संपूरक कोण हो सकते हैं।
- दो समकोण परस्पर संपूरक कोण हो सकते हैं।
- एक न्यूनकोण तथा एक अधिककोण परस्पर संपूरक कोण हो सकते हैं।

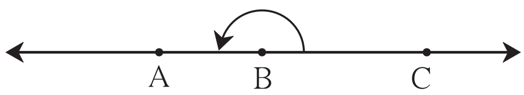
आओ, समझें

विपरीत किरण (Opposite rays)



आकृति (i)

संलग्न आकृति में किरणों के नाम बताओ।
किरणों के आरंभ बिंदु का नाम बताओ।
आकृति (i) में कोण का नाम लिखो।



आकृति (ii)

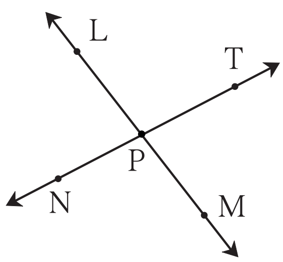
संलग्न आकृति (ii) में कोण का नाम लिखो।
आकृति में आरंभ बिंदु B वाली किरणों के नाम लिखो।

आकृति (i) में किरण BC तथा किरण BA से अधिककोण बनता है जबकि आकृति (ii) में किरण BC तथा किरण BA से सरलकोण बनता है और सरल रेखा मिलती है। यहाँ किरण BC तथा किरण BA परस्पर विपरीत किरणें हैं।

यह मैंने समझा

जिन दो किरणों का आरंभ बिंदु सामान्य हो और वे किरणें एकरेखीय हों तो उन किरणों को विपरीत किरणें कहते हैं।

प्रश्नसंग्रह 18

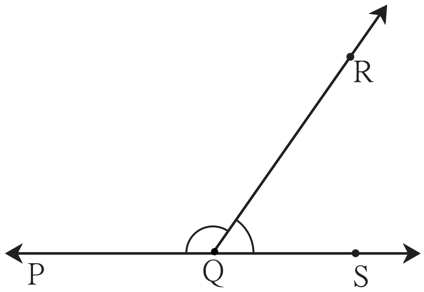


1. संलग्न आकृति में विपरीत किरणों के नाम लिखो।

2. क्या किरण PM और किरण PT विपरीत किरणें हैं ? सकारण लिखो।

आओ, समझें

रेखीय युगल कोण (Angles in linear pair)



- संलग्न आकृति में बने कोणों के नाम लिखो।
- कोणों की जोड़ियाँ किस प्रकार की हैं ?
- कोणों की कौन-सी भुजाएँ सामान्य भुजा नहीं हैं ? (कोण मापक की सहायता से मापो।)
- $m\angle PQR = \boxed{}^\circ$
- $m\angle RQS = \boxed{}^\circ$
- $m\angle PQR + m\angle RQS = 180^\circ$

आकृति में बने $\angle PQR$ तथा $\angle RQS$ संलग्न कोण हैं। वे संपूरक कोण भी हैं। उनकी जो भुजाएँ सामान्य भुजा नहीं हैं, विपरीत किरणें हैं। इसका अर्थ हैं कि उन भुजाओं से एक रेखा बनती है। इन दोनों को रेखीय युगल कोण कहते हैं। **रेखीय युगल कोणों के मापों का योगफल 180° होता है।**

यह मैंने समझा

> जिन दो कोणों की एक भुजा सामान्य हो तथा असामान्य भुजाएँ एक रेखीय हों ऐसे कोणों को रेखीय युगल कोण कहते हैं। रेखीय युगल कोण परस्पर संपूरक कोण होते हैं।

उपक्रम : स्ट्रॉ या सीधी काड़ियों (तिनकों) की सहायता से अध्ययन किए हुए कोणों की जोड़ियाँ बनाओ।

प्रश्नसंग्रह 19

नीचे दिए गए वर्णनानुसार कोणों की रचना करो। कोई रचना ना होने पर कारण लिखो।

(i) संलग्न न हों ऐसे कोटिपूरक कोण।

(ii) रेखीय युगल कोण जो संपूरक कोण न हों।

(iii) संपूरक कोण जो रेखीय युगलकोण न हो।

(iv) रेखीय युगल कोण जो संलग्न कोण न हों।

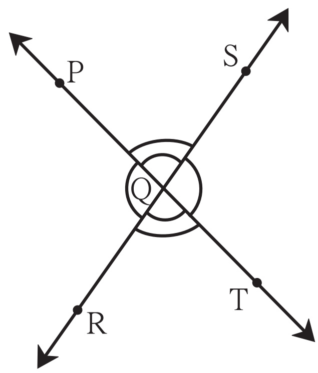
(v) जो कोटिपूरक कोण न हो साथ ही संलग्न कोण भी न हो ।

(vi) रेखीय युगल कोण जो कोटिपूरक कोण भी हों।

आओ, समझें

शीर्षाभिमुख कोण (Vertically opposite angles)

संलग्न आकृति में रेखा PT तथा रेखा RS परस्पर बिंदु Q पर प्रतिच्छेदित करती हैं। इस प्रकार चार कोण बनते हैं। $\angle PQR$ यह किरण QP तथा किरण QR से तैयार हुआ है। किरण QP तथा किरण QR की विपरीत किरणें क्रमशः किरण QT तथा किरण QS हैं। इन विपरीत किरणों से बना कोण $\angle SQT$ है। अतः $\angle SQT$ तथा $\angle PQR$ शीर्षाभिमुख कोण हैं।



यह मैंने समझा

- जिन दो किरणों से कोई कोण तैयार होता है, उसकी विपरीत किरणों से तैयार हुआ कोण पहले कोण का शीर्षाभिमुख कोण होता है।

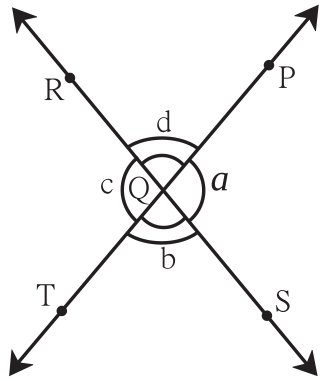
आओ, समझें

शीर्षाभिमुख कोणों के गुणधर्म

संलग्न आकृति में $\angle PQS$ का शीर्षाभिमुख कोण कौन-सा है ?

आकृति में दर्शाए गए अनुसार $m\angle PQS = a$, $m\angle SQT = \text{b}$, $m\angle TQR = \text{c}$, $m\angle PQR = \text{d}$

$\angle PQS$ तथा $\angle SQT$ रेखीय युगल कोण हैं।



$\therefore a + \text{b} = 180^\circ$

उसी प्रकार $m\angle SQT$ तथा $m\angle TQR$ भी रेखीय युगल कोण हैं।

$\therefore \text{b} + \text{c} = 180^\circ$

$\therefore a + \text{b} = \text{b} + \text{c}$

$\therefore a = \text{c}$ .... (दोनों पक्षों में से b घटाने पर)

$\therefore \angle PQS$ तथा $\angle TQR$ के माप समान हैं।

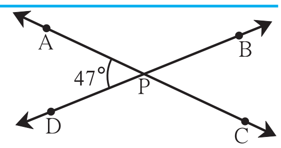
अर्थात सर्वांगसमकोण है।

उसी प्रकार $m\angle PQR = m\angle SQT$ अर्थात $\angle PQR$ तथा $\angle SQT$ सर्वांगसमकोण हैं।

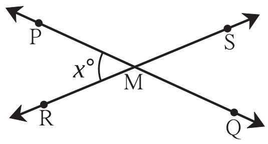
यह मैंने समझा

- दो रेखाओं के परस्पर प्रतिच्छेदन से बनने वाले शीर्षाभिमुख कोणों के माप समान होते हैं।

प्रश्नसंग्रह 20



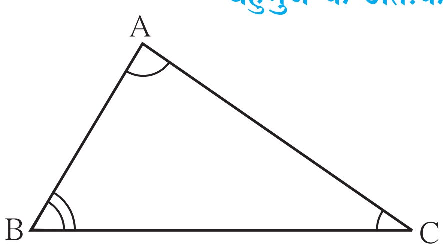
1. रेखा AC तथा रेखा BD परस्पर बिंदु P पर प्रतिच्छेदित करते हैं। $m\angle APD = 47^\circ$ तो $\angle APB$, $\angle BPC$ तथा $\angle CPD$ के माप लिखो।



2. रेखा PQ तथा रेखा RS परस्पर बिंदु M पर प्रतिच्छेदित करते हैं। $m\angle PMR = x^\circ$ तो $\angle PMS$, $\angle SMQ$ तथा $\angle QMR$ के माप लिखो।

आओ, समझें

बहुभुज के अंतःकोण (Interior angles of a polygon)

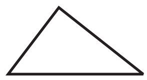
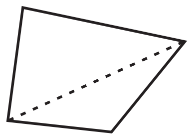
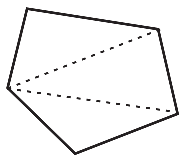
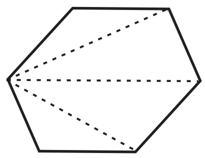
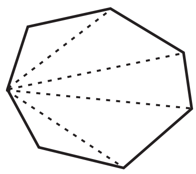


त्रिभुज के अंतःकोण

$\angle A$, $\angle B$ तथा $\angle C$ यह ΔABC के अंतःकोण हैं।

- $m\angle ABC + m\angle BAC + m\angle ACB = \boxed{}\ ^\circ$

नीचे दी गई तालिका का निरीक्षण करो तथा निष्कर्ष निकालो।

भुजाओं की संख्या	बहुभुज आकृति का नाम	बहुभुज की आकृति	त्रिभुजों की संख्या	अंत:कोणों के मापों का योग
3	त्रिभुज		1	$180^\circ \times 1 = \square$
4	चतुर्भुज		2	$180^\circ \times 2 = \square$
5	पंचभुज		3	$180^\circ \times 3 = \square$
6	षट्भुज		4	$180^\circ \times \square = \square$
7	सप्तभुज		5	
8	अष्टभुज		6	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	n भुजा वाला बहुभुज		(n - 2)	$180^\circ \times (n - 2)$

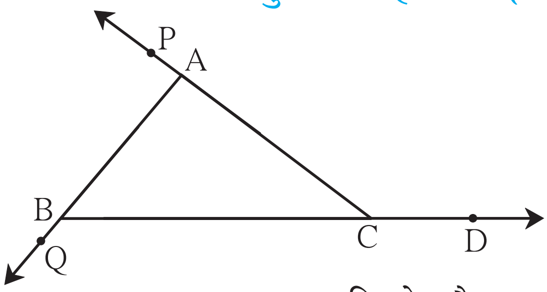
ध्यान दो कि बहुभुज में ऊपर दर्शाए अनुसार त्रिभुजों की संख्या उस बहुभुज की भुजाओं की संख्या से दो कम होती है।

यह मैंने समझा

n भुजाओं वाले बहुभुज के अंत:कोणों के मापों का योग = $180^\circ \times (n - 2)$

आओ, समझें

त्रिभुज का बहिष्कोण (Exterior angle of a triangle)



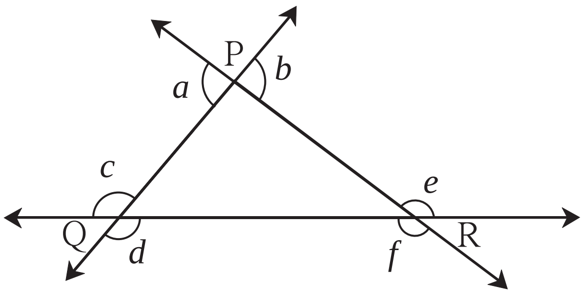
संलग्न आकृति में ΔABC की भुजा BC को बढ़ाने पर त्रिभुज के बाहर $\angle ACD$ बनता है।

$\angle ACD$ यह ΔABC का बहिष्कोण है। $\angle ACD$ तथा $\angle ACB$ रेखीय युगल कोण हैं।
$\angle PAB$ और $\angle QBC$ भी ΔABC के बहिष्कोण हैं।

यह मैंने समझा

- त्रिभुज की किसी एक भुजा को बढ़ाने पर बनने वाला वह कोण जो त्रिभुज के अंतःकोण का संलग्न कोण हो तो उस कोण को त्रिभुज का बहिष्कोण कहते है।

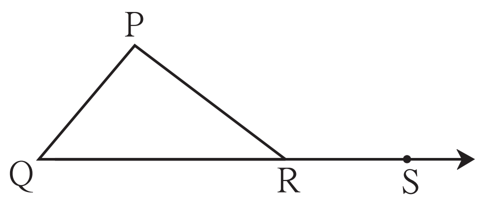
उदा. संलग्न आकृति में a, b, c, d, e, f ये सभी ΔPQR के बहिष्कोण हैं। प्रत्येक त्रिभुज के इसी प्रकार छह बहिष्कोण होते हैं।



आओ, समझें

त्रिभुज के बहिष्कोण का गुणधर्म

संलग्न आकृति में $\angle PRS$,यह ΔPQR का बहिष्कोण है। $\angle PRQ$ उसका संलग्न अंतःकोण है। अन्य दो अंतःकोण $\angle P$ तथा $\angle Q$, $\angle PRS$ से दूरी पर हैं। $\angle P$ तथा $\angle Q$ को $\angle PRS$ के दूरस्थ अंतःकोण कहते हैं।



$m\angle P + m\angle Q + m\angle PRQ = \boxed{}\ ^\circ$ ....(त्रिभुज के तीनों कोणों का योग)

$m\angle PRS + m\angle PRQ = \boxed{}\ ^\circ$ ....(रेखीय युगल कोण)

$\therefore\ m\angle P + m\angle Q + m\angle PRQ = m\angle PRS + m\angle PRQ$

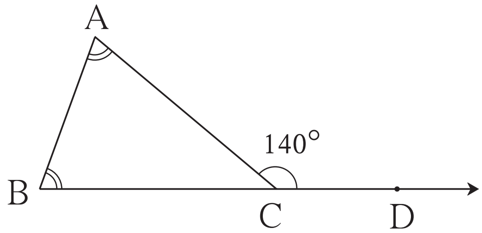
$\therefore\ m\angle P + m\angle Q = m\angle PRS$ .... (दोनों पक्षों से $m\angle PRQ$ घटाने पर)

यह मैंने समझा

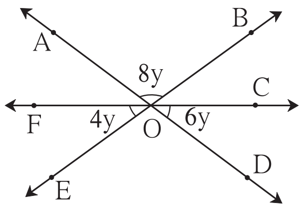
- त्रिभुज के बहिष्कोण का माप उसके संलग्न दूरस्थ अंतःकोणों के मापों के योगफल के बराबर होता है।

प्रश्नसंग्रह 21

1. संलग्न आकृति में $\angle ACD$ यह ΔABC का बहिष्कोण है। $\angle A$ तथा $\angle B$ के माप समान हैं। यदि $m\angle ACD = 140^\circ$ हो तो $\angle A$ और $\angle B$ के माप ज्ञात करो।



2. संलग्न आकृति में दिए गए कोणों के मापों के आधार पर शेष कोणों के माप लिखो।



3*. समद्विबाहु ΔABC में $\angle A$ तथा $\angle B$ के माप समान हैं। $\angle ACD$ यह ΔABC का बहिष्कोण है। $\angle ACB$ तथा $\angle ACD$ के माप क्रमशः $(3x - 17)^\circ$ तथा $(8x + 10)^\circ$ हो तो $\angle ACB$ तथा $\angle ACD$ के माप ज्ञात करो। उसी प्रकार $\angle A$ तथा $\angle B$ के माप ज्ञात करो।

ICT Tools or Links

- Geogebra की सहायता से एक ही आरंभ बिंदुवाली दो किरणें खींचो। Move Option का उपयोग कर किरण को घुमाओ। एक विशिष्ट स्थिति में विपरीत किरणें बनती हैं। इस बात की जाँच करो।
- रेखीय युगल कोण बनाओ। सामान्य भुजा move कर विभिन्न रेखीय युगल कोणों की जोड़ियाँ बनाकर देखो।
- Geogebra के Polygon Tools का उपयोग कर विविध बहुभुज बनाओ। उनके अंतःकोणों के मापों के गुणधर्म की जाँच करो।

5 परिमेय संख्याएँ और उनपर आधारित संक्रियाएँ

आओ, समझें

परिमेय संख्याएँ (Rational numbers)

पिछली कक्षाओं में हमने 1, 2, 3, 4, ... इन गणन संख्याओं अर्थात प्राकृत संख्याओं का अध्ययन किया है। प्राकृत संख्या, शून्य तथा प्राकृत संख्याओं की विपरीत संख्याओं को मिलाकर बनने वाले पूर्णांक संख्या समूह की जानकारी भी हमें है। इसी प्रकार $\frac{7}{11}, \frac{2}{5}, \frac{1}{7}$ इन भिन्नों से भी हम परिचित हैं। पूर्णांक संख्या और भिन्न को समाविष्ट करने वाला कोई संख्या समूह है क्या, इसपर विचार करेंगे।

$4 = \frac{12}{3}$, $7 = \frac{7}{1}$, $-3 = \frac{-3}{1}$, $0 = \frac{0}{2}$ इस तरह सभी पूर्णांक संख्याओं को $\frac{m}{n}$ के रूप में लिख सकते हैं, यह हमें पता है। यदि m कोई पूर्णांक और n कोई शून्येतर पूर्णांक हो तो $\frac{m}{n}$ यही संख्या परिमेय संख्या कहलाती है। परिमेय संख्या समूह में उपर्युक्त सभी प्रकार की संख्याओं का समावेश होता है।

परिमेय संख्या $\frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{-17}{28}$, 2.17 आदि

पूर्णांक संख्या $-3, -8, -1$ आदि

पूर्ण संख्या 0

प्राकृत संख्या

1, 2, 3, ...

नीचे दी गई तालिका पूर्ण करो।

	-3	$\frac{3}{5}$	-17	$-\frac{5}{11}$	5
प्राकृत संख्या	×				✓
पूर्णांक संख्या	✓				
परिमेय संख्या	✓				

परिमेय संख्याओं पर की जाने वाली संक्रियाएँ

परिमेय संख्या में अंश तथा हर का उपयोग कर भिन्न के रूप में लिखा जाता है अतः परिमेय संख्याओं पर की जाने वाली संक्रियाएँ, भिन्नों पर की जाने वाली संक्रियाओं के जैसे ही करते हैं।

(1) $\frac{5}{7} + \frac{9}{11} = \frac{55+63}{77} = \frac{118}{77}$

(2) $\frac{1}{7} - \frac{3}{4} = \frac{4-21}{28} = \frac{-17}{28}$

(3) $2\frac{1}{7} + 3\frac{8}{14} = \frac{15}{7} + \frac{50}{14}$

$= \frac{30}{14} + \frac{50}{14}$

$= \frac{80}{14} = \frac{40}{7}$

(4) $\frac{9}{13} \times \frac{4}{7} = \frac{9\times4}{13\times7} = \frac{36}{91}$

(5) $\frac{3}{5} \times \frac{(-4)}{5} = \frac{3\times(-4)}{5\times5} = \frac{-12}{25}$

(6) $\frac{9}{13} \times \frac{26}{3} = \frac{3\times2}{1} = \frac{6}{1}$

आओ, थोड़ा याद करें

किसी एक संख्या को दूसरी संख्या से भाग देना अर्थात उस संख्या को दूसरी संख्या के गुणात्मक प्रतिलोम संख्या से गुणा करना होता है। हमने देखा हैं कि $\frac{5}{6}$ तथा $\frac{6}{5}$, $\frac{2}{11}$ तथा $\frac{11}{2}$ गुणात्मक प्रतिलोम संख्याओं की जोड़ियाँ हैं।

इसी तरह $\left(\frac{-5}{4}\right) \times \left(\frac{-4}{5}\right) = 1$; $\left(\frac{-7}{2}\right) \times \left(\frac{-2}{7}\right) = 1$ इसी तरह $\left(\frac{-5}{4}\right)$ तथा $\left(\frac{-4}{5}\right)$ और $\left(\frac{-7}{2}\right)$ तथा $\left(\frac{-2}{7}\right)$ गुणात्मक प्रतिलोम संख्याओं की जोड़ियाँ हैं अर्थात $\frac{-5}{4}$ तथा $\frac{-4}{5}$ भी परस्पर गुणात्मक प्रतिलोम हैं। $\frac{-7}{2}$ तथा $\frac{-2}{7}$ भी परस्पर गुणात्मक प्रतिलोम हैं।

जरा ध्यान दें

उदा. $\frac{-11}{9}$ तथा $\frac{9}{11}$ इनका गुणनफल -1 होता है। अतः $\frac{-11}{9}$ और $\frac{9}{11}$ गुणात्मक प्रतिलोम संख्याओं की जोड़ी नहीं है।

आओ, चर्चा करें

हम विभिन्न संख्या समूहों की विशेषता देखेंगे। इसके लिए समूह में चर्चा कर दी गई तालिका पूर्ण करो। प्राकृत संख्या समूह, पूर्णांक संख्या समूह तथा परिमेय संख्या समूह पर विचार करेंगे। इन प्रत्येक संख्या समूह के आगे जोड़ना, घटाना, गुणा तथा भाग की संक्रिया करने पर मिलने वाले निष्कर्ष को (✓) या (×) चिह्न से दिखाओ। ध्यान रखो कि शून्य से भाग नहीं दिया जा सकता।

- प्राकृत संख्याओं को जोड़ने पर सदैव प्राकृत संख्या ही मिलती है अतः प्राकृत संख्या समूह के आगे जोड़ के चौखट में (✓) चिह्न लगाओ।
- दो प्राकृत संख्याओं में घटाने की संक्रिया करने पर सदैव प्राकृत संख्या ही मिलेगी, ऐसा नहीं होता। कारण $7 - 10 = -3$ इस प्रकार के कई उदाहरण हैं। अतः घटाने के चौखट के नीचे (×) यह चिह्न लगाओ। तालिका में जहाँ - जहाँ (×) यह चिह्न आएगा उसका कारण स्पष्ट करो। (×) का कारण उदाहरणसहित देते समय असंख्य उदाहरणों में से एक ही पर्याप्त है।

संख्या समूह	जोड़	घटाना	गुणा	भाग
प्राकृत संख्या	✓	× $(7 - 10 = -3)$	✓	× $(3 \div 5 = \frac{3}{5})$
पूर्णांक संख्या				
परिमेय संख्या				

यह मैंने समझा

- प्राकृत संख्या समूह यह जोड़ एवं गुणा की संक्रिया के लिए पूर्ण है किंतु घटाने तथा भाग की संक्रिया के लिए पूर्ण नहीं है। दो प्राकृत संख्याओं का अंतर और भागफल सदैव प्राकृत संख्या नहीं होता है।
- पूर्णांक संख्या समूह यह जोड़, घटाव, गुणा की संक्रियाओं के लिए पूर्ण हैं किंतु भाग की संक्रिया के लिए पूर्ण नहीं है।
- परिमेय संख्या समूह केवल जोड़ना, घटाना, गुणा तथा भाग की सभी संक्रियाओं के लिए पूर्ण है। किंतु शून्य से भाग नहीं दिया जा सकता।

प्रश्नसंग्रह 22

1. नीचे दी गई परिमेय संख्याओं को जोड़ो।

(i) $\frac{5}{36} + \frac{6}{42}$ (ii) $1\frac{2}{3} + 2\frac{4}{5}$ (iii) $\frac{11}{17} + \frac{13}{19}$ (iv) $2\frac{3}{11} + 1\frac{3}{77}$

2. नीचे दी गई परिमेय संख्याओं को घटाओ।

(i) $\frac{7}{11} - \frac{3}{7}$ (ii) $\frac{13}{36} - \frac{2}{40}$ (iii) $1\frac{2}{3} - 3\frac{5}{6}$ (iv) $4\frac{1}{2} - 3\frac{1}{3}$

3. नीचे दी गई परिमेय संख्याओं का गुणनफल ज्ञात करो।

(i) $\frac{3}{11} \times \frac{2}{5}$ (ii) $\frac{12}{5} \times \frac{4}{15}$ (iii) $\frac{(-8)}{9} \times \frac{3}{4}$ (iv) $\frac{0}{6} \times \frac{3}{4}$

4. नीचे दी गई संख्याओं के गुणात्मक प्रतिलोम संख्या लिखो।

(i) $\frac{2}{5}$ (ii) $\frac{-3}{8}$ (iii) $\frac{-17}{39}$ (iv) 7 (v) $-7\frac{1}{3}$

5. नीचे दी गई परिमेय संख्याओं के भागफल ज्ञात करो।

(i) $\frac{40}{12} \div \frac{10}{4}$ (ii) $\frac{-10}{11} \div \frac{-11}{10}$ (iii) $\frac{-7}{8} \div \frac{-3}{6}$ (iv) $\frac{2}{3} \div (-4)$

(v) $2\frac{1}{5} \div 5\frac{3}{6}$ (vi) $\frac{-5}{13} \div \frac{7}{26}$ (vii) $\frac{9}{11} \div (-8)$ (viii) $5 \div \frac{2}{5}$

आओ, समझें

परिमेय संख्याओं के मध्य आनेवाली संख्याएँ

- 2 से 9 इन प्राकृत संख्याओं के मध्य आनेवाली प्राकृत संख्या कौन-सी हैं, लिखो।
- -4 से 5 इनके मध्य कौन-सी पूर्णांक संख्या है, लिखो।
- $\frac{1}{2}$ तथा $\frac{3}{4}$ के मध्य कौन-सी परिमेय संख्या हो सकती है, लिखो ?

उदा. $\frac{1}{2}$ तथा $\frac{4}{7}$ इन परिमेय संख्याओं के मध्य आने वाली परिमेय संख्या ज्ञात करेंगे। इसके लिए इन संख्याओं के हर समान करेंगे।

$$\frac{1}{2} = \frac{1\times7}{2\times7} = \frac{7}{14}, \qquad \frac{4}{7} = \frac{4\times2}{7\times2} = \frac{8}{14}$$

7 तथा 8 क्रमिक प्राकृत संख्या हैं परंतु $\frac{7}{14}$ तथा $\frac{8}{14}$ क्रमिक परिमेय संख्याएँ हैं क्या ? किसी भी परिमेय संख्या का हर बढ़ा सकते हैं। उसी अनुपात (गुना) में अंश भी बढ़ता है।

$$\frac{7}{14} = \frac{70}{140}, \qquad \frac{8}{14} = \frac{80}{140} \;\ldots\ldots$$ (अंश और हर को 10 से गुणा करने पर)

अब $\frac{70}{140} < \frac{71}{140} \ldots\ldots < \frac{79}{140} < \frac{80}{140}$ यहाँ पर $\frac{7}{14}$ तथा $\frac{8}{14}$ के मध्य कितनी संख्याएँ मिलीं ?

उसी प्रकार $\frac{7}{14} = \frac{700}{1400}$, $\frac{8}{14} = \frac{800}{1400}$ .... (अंश तथा हर को 100 से गुणा करने पर)

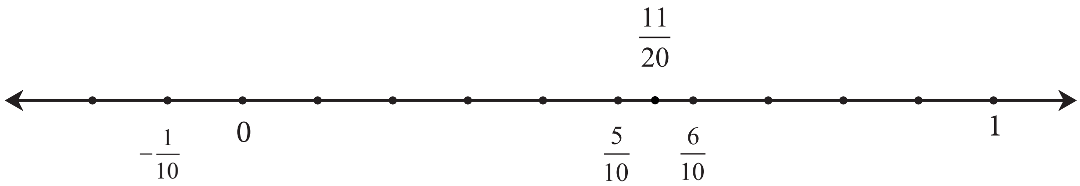
अतः $\frac{700}{1400} < \frac{701}{1400} \ldots\ldots < \frac{799}{1400} < \frac{800}{1400}$

इसी तरह परिमेय संख्याओं का रूपांतर सममूल्य संख्या में (हर बढ़ा कर) कर उनके मध्य आने वाली अधिक-से-अधिक परिमेय संख्या ज्ञात कर सकते हैं।

उदा., $\frac{1}{2}$ तथा $\frac{3}{5}$ इन परिमेय संख्याओं के मध्य आने वाली संख्या ज्ञात करना।

$\frac{1}{2}$ तथा $\frac{3}{5}$ इन परिमेय संख्या को समहर रूप देंगे।

जैसे $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$, $\qquad \frac{3}{5} = \frac{6}{10}$



संख्या रेखा पर $\frac{5}{10}, \frac{6}{10}$ इन संख्याओं को दर्शाने वाले बिंदु हैं, उनको जोड़ने वाले रेखाखंड का मध्यबिंदु ज्ञात करेंगे तथा यह देखेंगे की वह बिंदु कौन-सी संख्या दर्शाती है।

$\frac{1}{2}\left(\frac{5}{10}+\frac{6}{10}\right) = \frac{11}{20}$ यह बिंदु उस रेखाखंड का मध्यबिंदु है ।

क्योंकि $\frac{6}{10} - \frac{11}{20} = \frac{12-11}{20} = \frac{1}{20}$ $\qquad$ उसी तरह $\qquad \frac{11}{20} - \frac{5}{10} = \frac{11-10}{20} = \frac{1}{20}$

$\therefore$ $\frac{5}{10}$ तथा $\frac{6}{10}$ के बीच ठीक मध्य में $\frac{11}{20}$ यह संख्या है $\frac{1}{2}$ तथा $\frac{3}{5}$ के मध्य $\frac{11}{20}$ यह संख्या है।

इसी प्रकार $\frac{1}{2}$ तथा $\frac{11}{20}$ और $\frac{11}{20}$ तथा $\frac{3}{5}$ के मध्य की संख्या ज्ञात कर सकते हैं।

यह मैंने समझा

- दो परिमेय संख्याओं के मध्य असंख्य परिमेय संख्याएँ होती हैं।

प्रश्नसंग्रह 23

⊙ नीचे दी गई दो संख्याओं के मध्य आने वाली तीन परिमेय संख्याएँ लिखो।

(i) $\frac{2}{7}$, $\frac{6}{7}$ (ii) $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{3}$ (iii) $-\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$ (iv) $\frac{7}{9}$, $-\frac{5}{9}$

(v) $\frac{-3}{4}$, $\frac{+5}{4}$ (vi) $\frac{7}{8}$, $\frac{-5}{3}$ (vii) $\frac{5}{7}$, $\frac{11}{7}$ (viii) 0, $\frac{-3}{4}$

✸ अधिक जानकारी हेतु

यदि m पूर्णांक संख्या हो तो $m + 1$ यह उसकी क्रमिक (सलग) बड़ी पूर्णांक संख्या होती है। m तथा $m + 1$ के मध्य एक भी पूर्णांक संख्या नहीं होती है। दो पूर्णांक संख्याएँ जो क्रमिक न हो उनके मध्य आने वाली पूर्णांक संख्या गिन सकते हैं। जबकि किन्हीं दो परिमेय संख्याओं के मध्य असंख्य परिमेय संख्याएँ होती हैं।

आओ, थोड़ा याद करें

हमने देखा है कि दशमलव भिन्न का गुणा और भाग किस तरह करते हैं।

$$\frac{35.1}{10} = 35.1 \times \frac{1}{10} = \frac{351}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{351}{100} = 3.51$$

$$\frac{35.1}{100} = \frac{35.1}{1} = \frac{351}{10} \times \frac{1}{100} = \left(\frac{351}{1000}\right) = 0.\ 351$$

$$35.1 \times 10 = \frac{351}{10} \times 10 = 351.0$$

$$35.1 \times 1000 = \frac{351}{10} \times 1000 = \left(\frac{351000}{10}\right) = 35100.0$$

इससे स्पष्ट होता है कि दशमलव भिन्न को 100 से भाग देने पर दशमलव चिह्न 2 स्थान बाईं ओर तथा 1000 से गुणा करने पर दशमलव चिह्न तीन स्थान दाईं ओर ले जाते हैं। इस प्रकार के भाग तथा गुणा के प्रश्न हल करते समय निम्नलिखित नियम उपयोगी होते हैं।

दशमलव भिन्न के अपूर्णांक भाग के अंत में कितने भी शून्य लिखे जाएँ या पूर्णांक भाग के प्रारंभ में शून्य लिखने पर दशमलव भिन्न का मान नहीं बदलता।

$$1.35 = \frac{135}{100} \times \frac{100}{100} = \frac{13500}{10000} = 1.3500$$

$0.35 = \frac{35}{100} \times \frac{1000}{1000} = \frac{35000}{100000} = 0.35000$ आदि।

$1.35 = 001.35$ इसका उपयोग किस प्रकार होता है, इसे समझो।

$\frac{1.35}{100} = \frac{001.35}{100} = 0.0135$

आओ, समझें

परिमेय संख्याओं के दशमलव रूप (Decimal representation of rational numbers)

उदा. परिमेय संख्या $\frac{7}{4}$ को दशमलव रूप में लिखो।

हल :

$$\begin{array}{r} 1.75 \\ 4\overline{)7.000} \\ -\ 4 \\ \hline 30 \\ -\ 28 \\ \hline 20 \\ -\ 20 \\ \hline 00 \end{array}$$

(1) 7 = 7.0 = 7.000 (अपूर्णांक भाग के अंत में कितने ही शून्य लिख सकते हैं।)

(2) 7 में 4 से भाग देने पर 1 आता है और शेष 3 बचता है। अब 1 के बाद दशमलव चिह्न लगाते हैं। शेषफल 3 के आगे 0 लिखकर 30 में 4 से भाग देते हैं। अब आने वाला भागफल अपूर्णांक भाग है इसलिए भागफल में दशमलव चिह्न के बाद 7 लिखेंगे। अब भाज्य में से एक और शून्य लाकर पूरा करते हैं।

इस भाग में दशमलव भिन्न के अपूर्णांक भाग के बाद शून्य का उपयोग किया गया है।

उदा. $2\frac{1}{5}$ को दशमलव भिन्न के रूप में लिखो।

हल : $2\frac{1}{5} = \frac{11}{5}$ इसका दशमलव रूप तीन प्रकार से ज्ञात करेंगे।

(I) $\frac{1}{5}$ का दशमलव रूप ज्ञात करेंगे।

$$\begin{array}{r} 0.2 \\ 5\overline{)1.0} \\ -\ 0 \\ \hline 10 \\ -\ 10 \\ \hline 00 \end{array}$$

$\frac{1}{5} = 0.2$

$\therefore 2\frac{1}{5} = 2.2$

(II)

$$\begin{array}{r} 2.2 \\ 5\overline{)11.000} \\ -\ 10 \\ \hline 010 \\ -\ 10 \\ \hline 00 \end{array}$$

(III) $\frac{11}{5} = \frac{11 \times 2}{5 \times 2}$

$= \frac{22}{10}$

$= 2.2$

$\frac{11}{5} = 2.2$

उदा. $\frac{-5}{8}$ इस परिमेय संख्या को दशमलव रूप में लिखो।

$\frac{5}{8}$ का भाग विधि से दशमलव रूप 0.625 प्राप्त होता है। $\therefore \frac{-5}{8} = -0.625$

उपर्युक्त सभी उदाहरणों में शेष शून्य मिला है। भाग की संक्रिया पूर्ण हुई है। परिमेय संख्याओं के इस दशमलव रूप को खंडित दशमलव रूप कहते हैं।

उदा. कुछ परिमेय संख्याओं का दशमलव रूप अलग-अलग हैं, इसे देखो।

(i) $\frac{5}{3}$ को दशमलव रूप में लिखो।

हल :

$$\begin{array}{r} 1.66 \\ 3\overline{)5.00} \\ -\ 3 \\ \hline 2\ 0 \\ -\ 1\ 8 \\ \hline 20 \\ -\ 18 \\ \hline 2 \end{array}$$

$\therefore \frac{5}{3} = 1.666.......$

$\therefore \frac{5}{3} = 1.\dot{6}$

(ii) $\frac{2}{11}$ को दशमलव रूप में लिखो।

हल :

$$\begin{array}{r} 0.18 \\ 11\overline{)2.00} \\ -\ 0 \\ \hline 20 \\ -\ 11 \\ \hline 90 \\ -\ 88 \\ \hline 20 \end{array}$$

$\therefore \frac{2}{11} = 0.1818.......$

$\therefore \frac{2}{11} = 0.\overline{18}$

(iii) $2\frac{1}{3}$ को दशमलव रूप में लिखो। $2\frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

हल :

$$\begin{array}{r} 2.33 \\ 3\overline{)7.00} \\ -\ 6 \\ \hline 1\ 0 \\ -\ 9 \\ \hline 10 \\ -\ 9 \\ \hline 01 \end{array}$$

$2\frac{1}{3} = 2.33...$

$\therefore 2\frac{1}{3} = 2.\dot{3}$

(iv) $\frac{5}{6}$ को दशमलव रूप में लिखो।

हल :

$$\begin{array}{r} 0.833 \\ 6\overline{)50} \\ -\ 48 \\ \hline 020 \\ -\ 18 \\ \hline 020 \\ -\ 18 \\ \hline 02 \end{array}$$

$\frac{5}{6} = 0.833...$

$\therefore \frac{5}{6} = 0.8\dot{3}$

उपर्युक्त सभी उदाहरणों में भाग की संक्रिया पूर्ण नहीं हुई है। **दशमलव चिह्न की दाईं ओर एक अंक अथवा कुछ अंकों का समूह बार-बार आता है। इस प्रकार के दशमलव भिन्न को 'आवर्ती दशमलव भिन्न' कहते हैं।**

जिस दशमलव भिन्न के दशमलव चिह्न की दाईं ओर केवल एक अंक बार-बार आता है, उस अंक पर बिंदी लगा देते हैं। $2\frac{1}{3} = 2.33... = 2.\dot{3}$ उसी प्रकार दशमलव चिह्न के दाईं ओर जिन अंकों का समूह बार-बार आता है, उन अंकों के समूह पर आड़ी (-) पाई खींच देते हैं।

जैसे, $\frac{2}{11} = 0.1818....... = 0.\overline{18}$ और $\frac{5}{6} = 0.8\dot{3}$

यह मैंने समझा

- कुछ परिमेय संख्याओं का दशमलव रूप खंडित होता है तो कुछ परिमेय संख्याओं का दशमलव रूप आवर्ती होता है।

आओ, चर्चा करें

- भाग न देते हुए कौन-सी हरवाली परिमेय संख्याओं को खंडित रूप और दशमलव रूप में लिखा जा सकता है, इसे ज्ञात करो।

प्रश्नसंग्रह 24

नीचे दी गई परिमेय संख्याओं को दशमलव रूप में लिखो।

(i) $\frac{13}{4}$ (ii) $\frac{-7}{8}$ (iii) $7\frac{3}{5}$ (iv) $\frac{5}{12}$ (v) $\frac{22}{7}$ (vi) $\frac{4}{3}$ (vii) $\frac{7}{9}$

आओ, चर्चा करें

जोड़, घटाना, गुणा तथा भाग के चिह्नों का उपयोग करते हुए संख्याओं को प्रस्तुत करना (विन्यास करना) ही पदावली हैं।

$72 \div 6 + 2 \times 2$ यह पदावली हल करो एवं उत्तर लिखो।

हौसा की विधि

$72 \div 6 + 2 \times 2$

$= 12 + 2 \times 2$

$= 12 + 4$

$= 16$

मंगरू की विधि

$72 \div 6 + 2 \times 2$

$= 12 + 2 \times 2$

$= 14 \times 2$

$= 28$

दोनों का उत्तर अलग-अलग है। दोनों ने अलग-अलग क्रम से संक्रियाएँ की हैं। इस तरह संक्रियाओं का क्रम अलग करने पर उत्तर भी अलग ही मिलेगा। ऐसा न हो इसलिए संक्रियाओं का क्रम निश्चित करने के लिए कुछ नियम बनाएँ गए हैं। उन नियमों का पालन करने पर एक ही उत्तर मिलेगा। अब वह नियम देखते हैं। कभी-कभी जो संक्रिया प्रथम करनी होती है। उस समय पदावली में कोष्ठक का उपयोग करते हैं।

पदावली हल करने के नियम

(1) व्यंजन में एक-से-अधिक संक्रियाएँ हो तो सर्वप्रथम गुणा और भाग की संक्रियाएँ बाईं ओर से दाईं ओर दिए गए क्रम से करनी हैं।

(2) बाद में जोड़ एवं घटाने की संक्रियाएँ बाईं ओर से दाईं ओर जिस क्रम में हो, उसी क्रम में करनी हैं।

(3) कोष्ठक में एक-से-अधिक संक्रिया होने पर उपर्युक्त दोनों नियमों का पालन करते हुए संबंधित संक्रिया पहले करें।

उपर्युक्त नियमों का उपयोग करने पर हौसा की विधि सही हैं, यह समझ में आता है।

$\therefore\ 72 \div 6 + 2 \times 2 = 16$

नीचे दी गई पदावली हल करेंगे।

उदा. $40 \times 10 \div 5 + 17$

$= 400 \div 5 + 17$

$= 80 + 17$

$= 97$

उदा. $80 \div (15 + 8 - 3) + 5$

$= 80 \div (23 - 3) + 5$

$= 80 \div 20 + 5$

$= 4 + 5$

$= 9$

उदा. $2 \times \{25 \times [(113 - 9) + (4 \div 2 \times 13)]\}$

$= 2 \times \{25 \times [104 + (4 \div 2 \times 13)]\}$

$= 2 \times \{25 \times [104 + (2 \times 13)]\}$

$= 2 \times \{25 \times [104 + 26]\}$

$= 2 \times \{25 \times 130\}$

$= 2 \times 3250$

$= 6500$

उदा. $\frac{3}{4} - \frac{5}{7} \times \frac{1}{3}$

$= \frac{3}{4} - \frac{5}{21}$ (पहले गुणा)

$= \frac{3\times21-5\times4}{84}$ (बाद में घटाना)

$= \frac{63-20}{84}$

$= \frac{43}{84}$

ध्यान दो :

क्रियाओं का क्रम स्पष्ट करने के लिए एक-से-अधिक बार कोष्ठकों का उपयोग करना पड़ता है। उसके लिए छोटा कोष्ठक ( ) , बड़ा कोष्ठक [ ], धनु कोष्ठक { } का उपयोग करते हैं। कोष्ठक हल करते समय सबसे अंदर के कोष्ठक की संक्रियाएँ हल करते हैं। बाद में उसी क्रम से बाहर के कोष्ठक की संक्रियाएँ करते हैं।

प्रश्नसंग्रह 25

नीचे दी गई पदावली हल करो।

1. $50 \times 5 \div 2 + 24$
2. $(13 \times 4) \div 2 - 26$
3. $140 \div [(-11) \times (-3) - (-42) \div 14 - 1)]$
4. $\{(220 - 140) + [10 \times 9 + (-2 \times 5)]\} - 100$
5. $\frac{3}{5} + \frac{3}{8} \div \frac{6}{4}$

उपक्रम : चौखटों में दिए गए अंकों एवं चिह्नों का उपयोग करते हुए ऐसी पदावली तैयार करो, जिसका उत्तर 112 हो।

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	$+ \quad \times \quad \div \quad -$

✲ अधिक जानकारी हेतु :

पदावली हल करते समय चिह्नों का क्रम

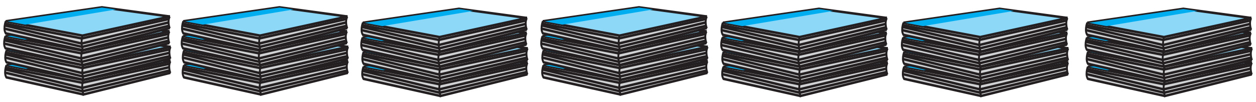
को	→ का	→ भा	→ गु	→ जो	→ घ
( )	×	÷	×	+	−
कोष्ठक की संक्रियाएँ	का, की, का गुणाकार उदा. 200 का $\frac{1}{4}$ $= 200 \times \frac{1}{4}$	भागाकार	गुणाकार	जोड़	घटाना

6 घातांक

आओ, थोड़ा याद करें

प्रत्येक लड़के को 4 इस प्रकार 7 लड़कों को 4-4 कॉपियों का वितरण किया गया।

कुल कॉपियाँ = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 28 कॉपियाँ



यहाँ जोड़ने की संक्रिया कई बार की गई है।

एक ही संख्या को कई बार जोड़ने की संक्रिया को गुणा की संक्रिया के रूप में भी दिखा सकते हैं।

कुल कॉपियाँ = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 4 × 7 = 28

आओ, समझें

आधार और घातांक (Base and Index)

अब 2 इस संख्या को कई बार लेकर गुणा करने की संक्रिया को छोटे में किस प्रकार दिखा सकते हैं यह देखेंगे।

$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ यहाँ 2 को 8 बार लेकर गुणा किया गया है।

इस जानकारी को 2^8 इस रूप में लिखते हैं। यहाँ 2^8 यह गुणा की संक्रिया का संक्षिप्त रूप है। इसमें को **आधार** 2 तथा **घातांक** 8 है।

8 ⟵ घातांक

2 ⟵ आधार

उदा. $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4$ यहाँ 5^4 यह घातांकित संख्या है।

5^4 इस घातांकित संख्या में 5 यह संख्या 'आधार' और 4 यह संख्या 'घातांक' है।

इनका वाचन '5 का घातांक 4' या '5 का चौथा घात' इस प्रकार करते हैं।

सामान्यतः a एक संख्या हो तो $a \times a \times a \times \ldots\ldots\ldots$ (m बार) $= a^m$

a^m का वाचन 'a का घातांक m' या 'a का m वा घात' इस प्रकार करते हैं।

यहाँ m एक प्राकृत संख्या है।

$\therefore$ $5^4 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$ अर्थात 5^4 इस घातांकित संख्या का मान 625 है।

उसी प्रकार $\left[\frac{-2}{3}\right]^3 = \frac{-2}{3} \times \frac{-2}{3} \times \frac{-2}{3} = \frac{-8}{27}$ अर्थात $\left[\frac{-2}{3}\right]^3$ का मान $\frac{-8}{27}$ है।

$7^1 = 7$, $10^1 = 10$ इस पर ध्यान दें। **किसी भी संख्या का एक घात वही संख्या होती है।** किसी संख्या का घातांक 1 हो तो उसे 1 घात को न लिखने का प्रचलन (संकेत) है। जैसे $5^1 = 5$, $a^1 = a$

प्रश्नसंग्रह 26

1. नीचे दी गई तालिका पूर्ण करो।

अ. क्र.	घातांकित संख्या	आधार	घातांक	गुणन रूप	मान
(i)	3^4	3	4	$3 \times 3 \times 3 \times 3$	81
(ii)	16^3	–	–	–	–
(iii)	–	(–8)	2	–	–
(iv)	–	–	–	$\frac{3}{7} \times \frac{3}{7} \times \frac{3}{7} \times \frac{3}{7}$	$\frac{81}{2401}$
(v)	$(-13)^4$	–	–	–	–

2. मान ज्ञात करो।

(i) 2^{10} (ii) 5^3 (iii) $(-7)^4$ (iv) $(-6)^3$ (v) 9^3

(vi) 8^1 (vii) $\left(\frac{4}{5}\right)^3$ (viii) $\left(-\frac{1}{2}\right)^4$

वर्ग और घन (Square and cube)

$3^2 = 3 \times 3$

3^2 का वाचन 3 का दूसरा घात या 3 का वर्ग इस प्रकार करते हैं।

$5^3 = 5 \times 5 \times 5$

5^3 का वाचन 5 का तीसरा घात या 5 का घन इस प्रकार करते हैं।

ध्यान में रखो

- **किसी संख्या का दूसरा घात अर्थात उसी संख्या का वर्ग होता है।**
- **किसी संख्या का तीसरा घात अर्थात उस संख्या का घन होता है।**

आओ, समझें

समान आधार वाली घातांकित संख्यांओं का गुणा

उदा. $2^4 \times 2^3$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

$= 2^7$

इसके आधार पर $2^4 \times 2^3 = 2^{4+3} = 2^7$

उदा. $(-3)^2 \times (-3)^3$

$= (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)$

$= (-3)^5$

इसके आधार पर $(-3)^2 \times (-3)^3 = (-3)^{2+3} = (-3)^5$

उदा. $\left(\frac{-2}{5}\right)^2 \times \left(\frac{-2}{5}\right)^3 = \left(\frac{-2}{5}\right) \times \left(\frac{-2}{5}\right) \times \left(\frac{-2}{5}\right) \times \left(\frac{-2}{5}\right) \times \left(\frac{-2}{5}\right) = \left(\frac{-2}{5}\right)^5$

इस आधार पर $\left(\frac{-2}{5}\right)^2 \times \left(\frac{-2}{5}\right)^3 = \left(\frac{-2}{5}\right)^{2+3} = \left(\frac{-2}{5}\right)^5$

यह मैंने समझा

- यदि a कोई परिमेय संख्या हो और m तथा n हे धन पूर्णांक हो तो $a^m \times a^n = a^{m+n}$

प्रश्नसंग्रह 27

(1) सरल रूप दो।

(i) $7^4 \times 7^2$ (ii) $(-11)^5 \times (-11)^2$ (iii) $\left(\frac{6}{7}\right)^3 \times \left(\frac{6}{7}\right)^5$

(iv) $\left(-\frac{3}{2}\right)^5 \times \left(-\frac{3}{2}\right)^3$ (v) $a^{16} \times a^7$ (vi) $\left(\frac{P}{5}\right)^3 \times \left(\frac{P}{5}\right)^7$

आओ, समझें

समान आधार वाली घातांकित संख्याओं का भागाकार

उदा. $6^4 \div 6^2 = ?$

$$\frac{6^4}{6^2} = \frac{6\times6\times6\times6}{6\times6}$$

$$= 6 \times 6$$

$$= 6^2$$

$6^4 \div 6^2 = 6^{4-2} = 6^2$

उदा. $(-2)^5 \div (-2)^3 = ?$

$$\frac{(-2)^5}{(-2)^3} = \frac{(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2)}{(-2)\times(-2)\times(-2)}$$

$$= (-2)^2$$

$(-2)^5 \div (-2)^3 = (-2)^2$

यह मैंने समझा

- यदि a कोई शून्येतर परिमेय संख्या हो, m तथा n ऐसे धनात्मक पूर्णांक हो कि $m > n$ तो $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

a^0 का अर्थ

$a \neq 0$ हो तो

$\frac{a^m}{a^m} = 1$ उसी प्रकार

$\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0$

$\therefore$ $\boxed{a^0 = 1}$

a^{-m} का अर्थ

$a^{-m} = a^{-m} \times 1$

$= a^{-m} \times \frac{a^m}{a^m}$

$= \frac{a^{-m+m}}{a^m}$

$= \frac{a^0}{a^m} = \frac{1}{a^m}$

$\boxed{a^{-m} = \frac{1}{a^m}}$

$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ $\therefore$ $a^{-1} = \frac{1}{a}$

उसी प्रकार $a \times \frac{1}{a} = 1$ अर्थात $a \times a^{-1} = 1$

$\therefore$ a^{-1} यह a का गुणात्मक प्रतिलोम हैं।

इसी तरह $\frac{5}{3}$ का गुणात्मक प्रतिलोम $\frac{3}{5}$ हैं।

$\therefore$ $\boxed{\left(\frac{5}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{5}}$

उदा. $\left(\frac{4}{7}\right)^{-3}$ इस घातांकित संख्या को देखो।

$$\left(\frac{4}{7}\right)^{-3} = \frac{1}{\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}} = \frac{1}{\frac{64}{343}} = \frac{343}{64} = \left(\frac{7}{4}\right)^{3}$$

यह मैंने समझा

- इस आधार पर यदि, $a \neq 0$, $b \neq 0$ और m यह धन पूर्णांक संख्या हो तो $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^{m}$ ।

नीचे दिए गए उदाहरणों का निरीक्षण कर देखो कि कौन-सा नियम मिलता हैं।

उदा. $(3)^4 \div (3)^6$

$$= \frac{3^4}{3^6}$$

$$= \frac{3\times3\times3\times3}{3\times3\times3\times3\times3\times3} = \frac{1}{3^2}$$

$$3^4 \div 3^6 = 3^{4-6} = 3^{-2}$$

उदा. $\left(\frac{3}{5}\right)^2 \div \left(\frac{3}{5}\right)^5$

$$= \frac{\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}}{\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}} = \frac{1}{\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}} = \frac{1}{\left(\frac{3}{5}\right)^3}$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 \div \left(\frac{3}{5}\right)^5 = \left(\frac{3}{5}\right)^{2-5} = \left(\frac{3}{5}\right)^{-3}$$

यह मैंने समझा

- यदि a कोई परिमेय संख्या हो $a \neq 0$ और m तथा n पूर्णांक संख्या हो तो $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

आओ, समझें

देखते हैं कि आधार (-1) हो और घातांक पूर्ण संख्या हो तो क्या होता है ।

$$(-1)^6 = \underline{(-1)\times(-1)}\times\underline{(-1)\times(-1)}\times\underline{(-1)\times(-1)} = 1\times1\times1 = 1$$

$$(-1)^5 = \underline{(-1)\times(-1)}\times\underline{(-1)\times(-1)}\times(-1) = 1\times1\times(-1) = -1$$

यहाँ m सम संख्या हो तो $(-1)^m = 1$ और m यह विषम संख्या हो तो $(-1)^m = -1$

प्रश्नसंग्रह 28

1. सरल रूप दो।

(i) $a^6 \div a^4$ (ii) $m^5 \div m^8$ (iii) $p^3 \div p^{13}$ (iv) $x^{10} \div x^{10}$

2. मान ज्ञात करो।

(i) $(-7)^{12} \div (-7)^{12}$ (ii) $7^5 \div 7^3$ (iii) $\left(\frac{4}{5}\right)^3 \div \left(\frac{4}{5}\right)^2$ (iv) $4^7 \div 4^5$

आओ, समझें

दो संख्याओं के गुणनफल तथा भागफल का घात

देखते हैं कि नीचे दिए गए उदाहरणों का निरीक्षण करने पर कौन-सा नियम मिलता है।

उदा. $(2 \times 3)^4$

$= (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3)$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 2^4 \times 3^4$

उदा. $\left(\frac{4}{5}\right)^3$

$= \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5}$

$= \frac{4\times4\times4}{5\times5\times5} = \frac{4^3}{5^3}$

यह मैंने समझा

यदि a तथा b कोई शून्येतर परिमेय संख्या और m पूर्णांक संख्या हो तो

(1) $(a \times b)^m = a^m \times b^m$ (2) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

$\left(a^m\right)^n$ अर्थात घातांकित संख्या का घात

$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

उदा. $\left(5^2\right)^3$

$= 5^2 \times 5^2 \times 5^2$

$= 5^{2+2+2}$

$= 5^{2\times3}$

$= 5^6$

उदा. $\left(7^{-2}\right)^{-5} = \frac{1}{\left(7^{-2}\right)^5}$

$= \frac{1}{7^{-2}\times7^{-2}\times7^{-2}\times7^{-2}\times7^{-2}}$

$= \frac{1}{7^{(-2)\times5}}$

$= \frac{1}{7^{-10}} = 7^{10}$

उदा. $\left[\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}\right]^3$

$= \left(\frac{2}{5}\right)^{-2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{-2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{5}\right)^{(-2)+(-2)+(-2)} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-6}$

$\left(a^m\right)^n = a^m \times a^m \times a^m \times \ldots\ldots\ldots\ n$ बार $= a^{m+m+m\ldots\ldots\ldots\ n \text{ बार}} = a^{m\times n}$

उपर्युक्त उदाहरणों से यह नियम मिलता है।

यह मैंने समझा

- यदि a कोई शून्येतर परिमेय संख्या हैं और m तथा n पूर्णांक संख्या हो तो $\left(a^m\right)^n = a^{m\times n} = a^{mn}$

ध्यान में रखो :

यदि a और b शून्येतर परिमेय संख्या और m तथा n पूर्णांक संख्या हो तो

- $a^m \times a^n = a^{m+n}$
- $a^m \div a^n = a^{m-n}$
- $a^1 = a$
- $a^0 = 1$
- $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$
- $(ab)^m = a^m \times b^m$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$
- $(a^m)^n = a^{mn}$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$

प्रश्नसंग्रह 29

1. सरल रूप दो।

(i) $\left[\left(\frac{15}{12}\right)^3\right]^4$ (ii) $\left(3^4\right)^{-2}$ (iii) $\left[\left(\frac{1}{7}\right)^{-3}\right]^4$ (iv) $\left[\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}\right]^{-3}$ (v) $\left(6^5\right)^4$

(vi) $\left[\left(\frac{6}{7}\right)^5\right]^2$ (vii) $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}\right]^5$ (viii) $\left[\left(\frac{5}{8}\right)^3\right]^{-2}$ (ix) $\left[\left(\frac{3}{4}\right)^6\right]^1$ (x) $\left[\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}\right]^2$

2. नीचे दी गई संख्याओं को धन घातांक का उपयोग कर लिखो।

(i) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-2}$ (ii) $\left(\frac{11}{3}\right)^{-5}$ (iii) $\left(\frac{1}{6}\right)^{-3}$ (iv) y^{-4}

गणित मेरा मित्र : विज्ञान, खगोल शास्त्र में

(1) दशमलव पद्धति में संख्या लिखते समय 10 की घात का विशेष उपयोग करते हैं।
पृथ्वी तथा चंद्रमा के बीच की दूरी 38,40,00,000 मी है।
यह दूरी 10 के घातांक रूप में निम्नलिखित विधि से लिखते हैं।

384 000 000 = 384×10^6

38 4000000 = 38.4×10^7

3 84000000 = 3.84×10^8 (प्रमाणित रूप)

(2) ऑक्सीजन के परमाणु का व्यास मिमी में दिया गया है।
0.0000000000000356 = 3.56×10^{-14}

(3) नीचे दी गई संख्याओं को प्रमाणित रूप में लिखने का प्रयत्न करो।
सूर्य का व्यास 1400000000 मी हैं।
प्रकाश का वेग = 300000000 मीटर/सेकंड हैं।

(4) संलग्न आकृति में Googol यह संख्या दर्शाई गई है।
उसे 10 के घातांक के रूप में लिखने का प्रयत्न करो।

कोई बड़ी-से-बड़ी संख्या या अत्यधिक छोटी संख्या लिखते समय एक अंकी पूर्णांक वाली दशमलव भिन्न संख्या और 10 का उचित घात इनके गुणन के रूप में लिखते हैं। उसे इस संख्या का प्रमाणित रूप (Standard form) कहते हैं।

Googol

1000000000000000000000000
0000000000000000000000000
0000000000000000000000000
0000000000000000000000000

आओ, थोड़ा याद करें

पूर्ण वर्ग संख्या का वर्गमूल ज्ञात करना

- दी गई संख्या में उसी संख्या से गुणा करने पर प्राप्त होने वाला गुणनफल उस संख्या का वर्ग होता है।

उदा. $6 \times 6 = 6^2 = 36$

$6^2 = 36$ इसका वाचन 6 का वर्ग 36 इस प्रकार करते हैं।

उदा. $(-5) \times (-5) = (-5)^2 = 25$

$(-5)^2 = 25$ का वाचन (-5) का वर्ग 25 हैं इस प्रकार करते हैं।

आओ, समझें

✸ दी गई संख्या का वर्गमूल ज्ञात करना।

उदा. $3 \times 3 = 3^2 = 9$ यहाँ 3 का वर्ग 9 है।

इसी जानकारी को 9 का वर्गमूल 3 हैं, इस रूप में भी लिख सकते हैं।

वर्गमूल के लिए $\sqrt{\ }$ इस चिह्न का उपयोग करते हैं। $\sqrt{9}$ का अर्थ हैं 9 का वर्गमूल $\therefore \sqrt{9} = 3$

उदा. $7 \times 7 = 7^2 = 49$ $\therefore \sqrt{49} = 7$

उदा. $8 \times 8 = 8^2 = 64$ इस प्रकार $\sqrt{64} = 8$

$(-8) \times (-8) = (-8)^2 = 64$ के आधार पर 64 का वर्गमूल -8 भी मिलता हैं।

x यह धन संख्या हो तो उसके दो वर्गमूल होते हैं।

इसमें से ऋण वर्गमूल $-\sqrt{x}$ तथा धन वर्गमूल $\sqrt{x}$ चिह्नों द्वारा दर्शाया जाता हैं।

उदा. 81 का वर्गमूल ज्ञात करो।

$81 = 9 \times 9 = -9 \times -9$ $\therefore \sqrt{81} = 9$ तथा $\sqrt{81} = -9$

हम अधिकांशतः धन वर्गमूल पर विचार करेंगे।

✸ दी गई संख्या का गुणनखंड पद्धति से वर्गमूल ज्ञात करना।

उदा. 144 का वर्गमूल ज्ञात करो।

दी गई संख्या के अभाज्य गुणनखंडो में से समान गुणनखंडों की जोड़ियाँ बनाओ।

2	144
2	72
2	36
2	18
3	9
3	3
	1

$$\begin{aligned} 144 &= 2 \times 72 \\ &= 2 \times 2 \times 36 \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 18 \\ &= \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3} \end{aligned}$$

प्राप्त गुणनखंडों में से समान गुणनखंड (संख्याओं) की जोड़ियाँ बनाओ।

प्रत्येक जोड़ी में से एक संख्या लेकर गुणनफल ज्ञात करो।

$\sqrt{144} = 2 \times 2 \times 3 = 12$ $\therefore \sqrt{144} = 12$

उदा. 324 का वर्गमूल ज्ञात करो।

दी गई संख्या के अभाज्य गुणनखंड ज्ञात कर समान संख्याओं की जोड़ियाँ बनाओ।

$$\begin{aligned} 324 &= 2 \times 162 \\ &= 2 \times 2 \times 81 \\ &= 2 \times 2 \times 3 \times 27 \\ &= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 9 \\ &= \underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3} \times \underline{3 \times 3} \end{aligned}$$

2	324
2	162
3	81
3	27
3	9
3	3
	1

वर्गमूल के लिए प्रत्येक जोड़ी से एक संख्या लो तथा गुणनफल ज्ञात करो।

$\sqrt{324} = 2 \times 3 \times 3 = 18$

$\therefore \sqrt{324} = 18$

प्रश्नसंग्रह 30

⦿ वर्गमूल ज्ञात करो।

(i) 625 (ii) 1225 (iii) 289 (iv) 4096 (v) 1089

✸ अधिक जानकारी हेतु (भाग विधि से वर्गमूल)

(1) 9801 का वर्गमूल ज्ञात करो। (2) 19321 का वर्गमूल ज्ञात करो। (3) 141.61 का वर्गमूल ज्ञात करो।

(1)

	99
9	$\overline{98}\,\overline{01}$
+ 9	− 81
189	1701
+ 9	− 1701
198	0000

$\sqrt{9801} = 99$

(2)

	139
1	$\overline{1}\,\overline{93}\,\overline{21}$
+ 1	− 1
23	093
+ 3	− 69
269	2421
+ 9	− 2421
278	0000

(3)

	11.9
1	$\overline{1}\,\overline{41}.\overline{61}$
+ 1	− 1
21	041
+ 1	− 21
229	2061
+ 9	− 2061
238	0000

जिन संख्याओं के अभाज्य गुणनखंड अधिक हो एवं अभाज्य गुणनखंड ज्ञात करना कठिन हो, उनका वर्गमूल ज्ञात करने के लिए यह विधि उपयोगी है।

एक अन्य उदाहरण देखने हेतु $\sqrt{137}$ का मान ज्ञात करो।

	11.7
1	$\overline{1}\,\overline{37}.\overline{00}$
+ 1	− 1
21	037
+ 1	− 21
227	1600
+ 7	− 1589
234	11

$\sqrt{137} > 11.7$

किंतु $(11.8)^2 = 139.24$

$\therefore 11.7 < \sqrt{137} < 11.8$

इस तरह $\sqrt{137}$ के निकट की संख्या ज्ञात कर सकते हैं।

जिस संख्या का वर्गमूल पूर्ण संख्या न हो उसके वर्गमूल के निकट का दशमलव, भिन्न इस विधि से ज्ञात कर सकते हैं।

❑❑❑

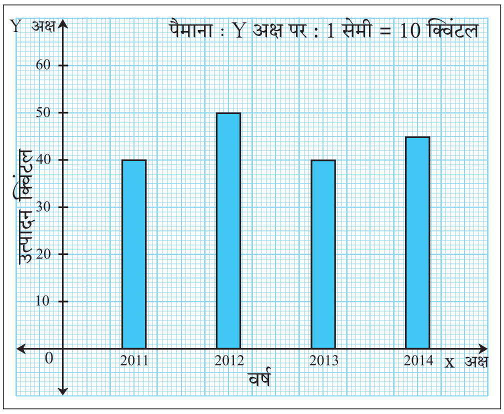
7 संयुक्त स्तंभालेख

आओ, चर्चा करें

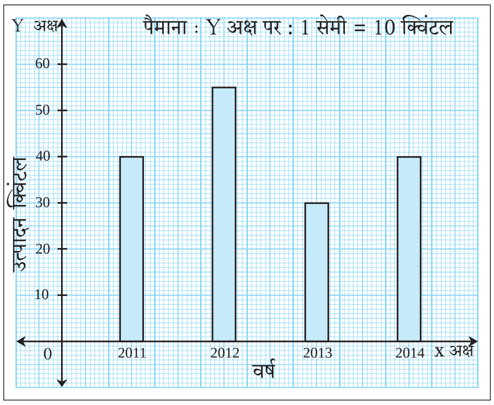
संयुक्त स्तंभालेख

अजय तथा विजय के खेतों में हुए गेहूँ के उत्पादन की क्विंटल में जानकारी स्तंभालेखों द्वारा दर्शाई गई हैं। इनका निरीक्षण करो।

अजय का गेहूँ उत्पादन



विजय का गेहूँ उत्पादन

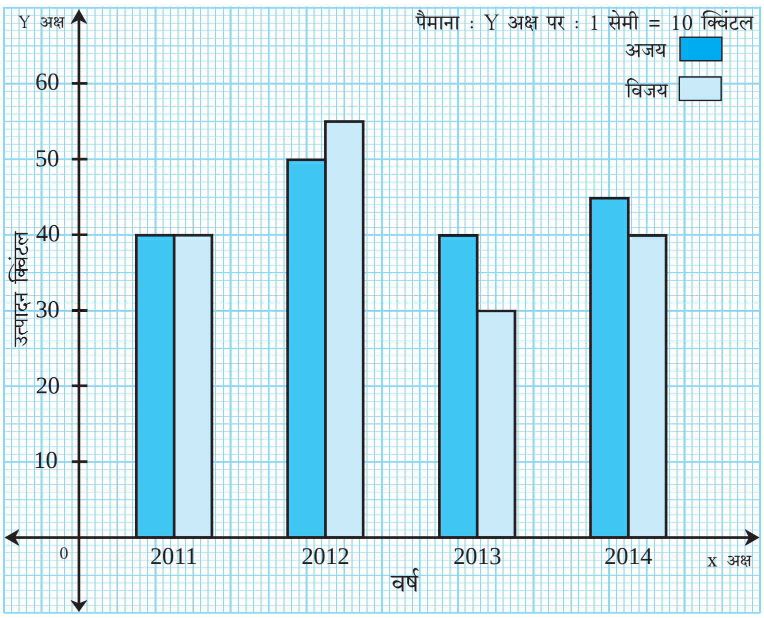


दोनों आलेखों की जानकारी एक ही आलेख कागज में दर्शाई जा सकती है क्या, यह देखेंगे। इस तरह कम जगह में अधिक जानकारी दी जा सकती है। उसी प्रकार अजय और विजय के गेहूँ का उत्पादन की तुलना करना आसान होगा। इस प्रकार बने स्तंभालेख को संयुक्त स्तंभालेख कहते हैं।

संयुक्त स्तंभालेख का निरीक्षण कर निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दो।

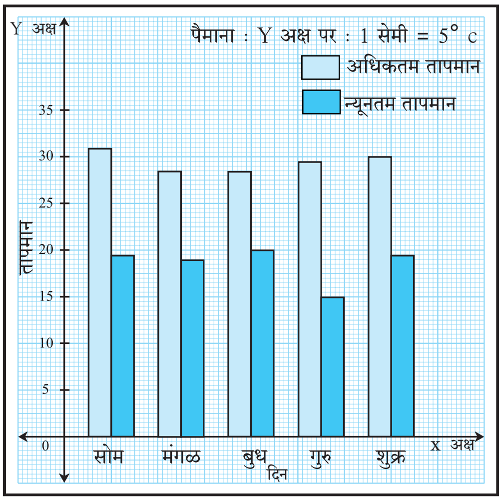
- किस वर्ष दोनों का गेहूँ उत्पादन समान है ?
- वर्ष 2014 में किसके गेहूँ का उत्पादन अधिक हुआ ?
- वर्ष 2013 में प्रत्येक का गेहूँ उत्पादन कितना था ?

अजय और विजय का गेहूँ उत्पादन



संयुक्त स्तंभालेख का वाचन

पुणे शहर के पाँच दिनों का अधिकतम तथा न्यूनतम तापमान (°C में) दिया गया है। संयुक्त स्तंभालेख का निरीक्षण कर दिए गए प्रश्नों के उत्तर लिखो।



- X - अक्ष पर कौन-सी जानकारी दर्शाई गई है ?
- Y - अक्ष पर कौन-सी जानकारी दर्शाई गई है ?
- कौन-से दिन का तापमान अधिकतम है ?
- कौन-से दिन का तापमान न्यूनतम है ?
- गुरुवार के अधिकतम और न्यूनतम तापमान में कितना अंतर है ?
- कौन-से दिन अधिकतम और न्यूनतम तापमान का अंतर सबसे अधिक है ?

आओ, समझें

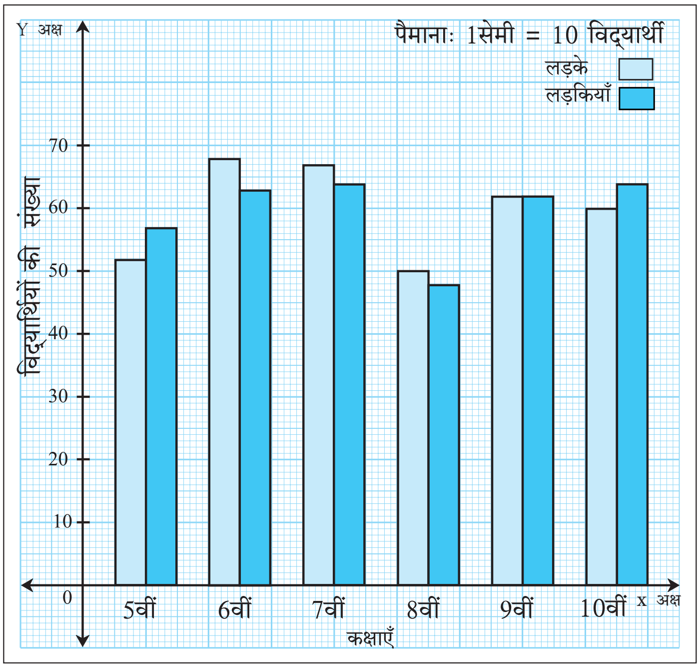
संयुक्त स्तंभालेख (Joint bar graph) खींचना

किसी विद्यालय के लड़कों एवं लड़कियों की संख्या दी गई है। इस जानकारी के आधार पर संयुक्त स्तंभालेख खींचो।

कक्षा	5 वीं	6 वीं	7 वीं	8 वीं	9 वीं	10 वीं
लड़के	52	68	67	50	62	60
लड़कियाँ	57	63	64	48	62	64

संयुक्त स्तंभालेख खींचने के सोपान

1. आलेख कागज पर X अक्ष तथा Y अक्ष और उनका प्रतिच्छेदन बिंदु दर्शाओ।
2. दो संयुक्त स्तंभालेखों के अंतर को समान रखकर X अक्षपर कक्षा को दिखाओ।
3. Y अक्ष पर पैमाना निश्चित करो। जैसे 1 इकाई = 10 लड़के/लड़कियाँ, Y अक्ष पर लड़कों एवं लड़कियों की संख्या दर्शाओ।
4. दिए गए पैमाना के अनुसार प्रत्येक कक्षा के लड़कों एवं लड़कियों की संख्या दर्शानेवाले स्तंभों की ऊँचाई निश्चित करो। दोनों ही स्तंभों को अलग-अलग रंग से दर्शाओ।

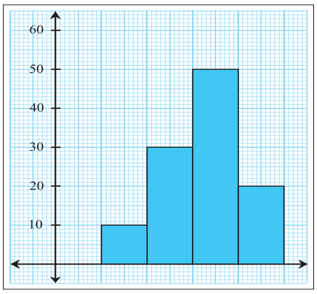


यह मैंने समझा

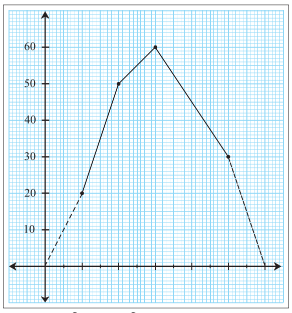
- संयुक्त स्तंभालेख में सभी स्तंभों की चौड़ाई समान होनी चाहिए।
- क्रमिक संयुक्त स्तंभालेखों के बीच की दूरी समान होनी चाहिए।
- संयुक्त स्तंभालेख का उपयोग तुलनात्मक अध्ययन के लिए किया जाता है।

गणित मेरा साथी : समाचारपत्र, पत्रिकाएँ, जानकारी का प्रस्तुतीकरण

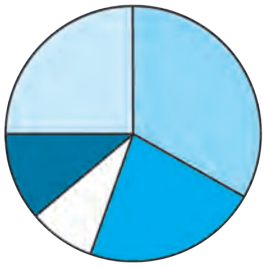
- समाचार पत्रों में दिए गए विभिन्न प्रकार के आलेखों का संग्रह कर, उसपर चर्चा करो।



1. स्तंभालेख



2. रेखालेख


3. वृत्तालेख

ICT Tools or Links

जानकारी प्रस्तुत करते समय संयुक्त स्तंभालेख के अतिरिक्त विभिन्न आलेखों का उपयोग किया जाता है। MS-Excell, Graph Matica, Geogebra पर दिए गए विभिन्न आलेखों को शिक्षकों की सहायता से देखो।

प्रश्नसंग्रह 31

1. वैश्विक वृक्ष दिवस के अवसर पर दो विद्यालयों द्वारा लगाए गए पौधों की संख्या नीचे तालिका में दी गई हैं। इस जानकारी के आधार पर संयुक्त स्तंभालेख खींचो।

पौधों के नाम / विद्यालय का नाम	बादाम	करंज	नीम	अशोक	गुलमोहर
नूतन विद्यालय	40	60	72	15	42
भारत विद्यालय	42	38	60	25	40

2. किसी जूस सेंटर में शनिवार तथा रविवार को विभिन्न फलों का रस लेने आए ग्राहकों की संख्या नीचे तालिका में दी गई है। इस जानकारी के आधार पर संयुक्त स्तंभालेख खींचो।

फल / वार	मोसंबी	संतरा	सेब	अनन्नास
शनिवार	43	30	56	40
रविवार	59	65	78	67

3. ग्रामपंचायत चुनाव में पाँच मतदान केंद्रों पर नीचे दिए तालिका अनुसार मतदान हुआ। इस जानकारी के आधार पर संयुक्त स्तंभालेख खींचो।

केंद्र क्रमांक / व्यक्ति	1	2	3	4	5
पुरुष	200	270	560	820	850
स्त्रियाँ	700	240	340	640	470

4. भारत के पाँच प्रमुख शहरों का अधिकतम और न्यूनतम तापमान °C में नीचे तालिका में दिया गया है। इस जानकारी के आधार पर संयुक्त स्तंभालेख खींचो।

शहर / तापमान	दिल्ली	मुंबई	कोलकता	नागपूर	कपूरथला
अधिकतम तापमान	35	32	37	41	37
न्यूनतम तापमान	26	25	26	29	26

5. निम्न तालिका में सोलापुर और पुणे के शासकीय रुग्णालयों/अस्पतालों की एक दिन में टीकाकरण किए गए बालकों की संख्या दी गई है। इस जानकारी के आधार पर संयुक्त स्तंभालेख खींचो ।

टीके का नाम / शहर	डी. पी.टी. पूरक	पोलिओ पूरक	चेचक	पीलिया
सोलापुर	65	60	65	63
पुणे	89	87	88	86

6. महाराष्ट्र तथा गुजरात राज्यों के साक्षर व्यक्तियों की संख्या प्रतिशत में नीचे तालिका में दी गई हैं। इस जानकारी के आधार पर संयुक्त स्तंभालेख खींचो।

सन / राज्य	1971	1981	1991	2001	2011
महाराष्ट्र	46	57	65	77	83
गुजरात	40	45	61	69	79

गणितीय मनोरंजन

$1 + 3 = 2^2$

$1 + 3 + 5 = 3^2$

$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$

इस आधार पर $1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ इस सूत्र को ध्यान में रखो।

सूत्र का उपयोग करते हुए $n = 5, 6, 7, 8, \ldots$ लेकर इनकी जाँच करो।

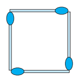
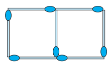
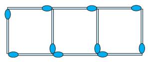
विज्ञान के प्रयोग से पाठ्यांकों का अनुमान ज्ञात करने के लिए एवं इसी प्रकार भूगोल और अर्थशास्त्र में भी संयुक्त स्तंभालेख का उपयोग होता है।

8 बैजिक व्यंजक और उनपर की जाने वाली संक्रियाएँ

आओ, समझें

बैजिक व्यंजक (Algebraic expressions)

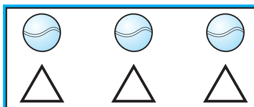
- नीचे दी गई तीलियों की रचना देखो। आकृतिबंध का निरीक्षण करो।

तीलियों की रचना				......	..	......	..	......
वर्ग	1	2	3	4	..	10	..	n
तीलियों की संख्या	4	7	10	13	..	......	..	......
	$3 + 1$	$6 + 1$	$9 + 1$	$12 + 1$	..	......	..	......
	$3 \times 1 + 1$	$3 \times 2 + 1$	$3 \times 3 + 1$	$3 \times 4 + 1$		$3 \times 10 + 1$		$3 \times n + 1$

उपर्युक्त आकृतिबंध तालिका का निरीक्षण करने पर हमें ध्यान में आता है कि तीलियों की संख्या = 3 × वर्गों की संख्या + 1

वर्गों की संख्या बदलती है। वह 2, 3, 4, ... , 10,... इनमें से कुछ भी हो सकती है। वर्गों की संख्या मालूम न होने पर उसे अक्षर से दर्शाते हैं। यहाँ पर वर्गों की संख्या को n अक्षर द्वारा दर्शाया गया है।

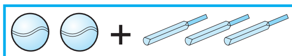
n यह चरांक (चर) है। चरांक का उपयोग कर $3 \times n + 1$ अर्थात $3n + 1$ यही बैजिक व्यंजन है।



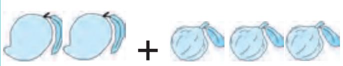
= 3 गेंदें

= 3 त्रिभुज

= $3t$

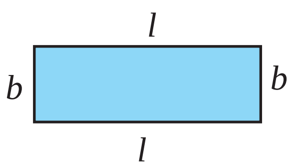


+ = ☐ गेंदे + ☐ बल्ले



+ = ☐ आम + ☐ अमरूद

$x + x + y + y + y = 2x + 3y$



आयत की परिमिति $= 2l + 2b$

$= 2(l + b)$

यह मैंने समझा

- $3n + 1$, $3t$, $2x + 3y$, $2(l + b)$ बैजिक व्यंजक हैं।
इन व्यंजकों में n, t, y, l, b, x ये चरांक हैं।

आओ, समझें

$3x$ इस व्यंजक में 3 यह x का गुणांक (coefficient) है।

$-15t$ में -15 यह चरांक t का गुणांक है।

जिस व्यंजक में केवल गुणा जैसी एक ही संक्रिया हो, उस व्यंजक को 'पद' (term) कहते हैं।

बैजिक व्यंजक एकपदी या अनेक पदों का योगफल होता है।

पद	गुणांक	चरांक
$11mn$	11	m, n
$-9x^2y^3$	-9	x, y
$\frac{5}{6}p$	$\frac{5}{6}$	p
a	1	a

उदा. बैजिक व्यंजक : $4x^2 - 2y + \frac{5}{6}xz$

इस व्यंजक में $4x^2$ पहला पद है जिसका गुणांक 4 है।

$-2y$ दूसरा पद है। जिसका गुणांक -2 है।

$\frac{5}{6}xz$ यह तीसरा पद है। जिसका गुणांक $\frac{5}{6}$ है।

ध्यान में रखो :

- $15 - x$ इस बैजिक व्यंजक में दो पद हैं। पहला पद 15 यह एक संख्या है।

  $15 - x = 15 + (-x)$ $\therefore$ दूसरा पद $-x$ है। इस पद में चरांक x का गुणांक (-1) है।
- जिन पदों के चरांक तथा उनके घातांक समान हो, उन पदों को सजातीय पद कहते हैं।

सजातीय पद (Like terms)

(i) $2x, \ 5x, \ -\frac{2}{3}x$ (ii) $-5x^2y, \ \frac{6}{7}yx^2$

विजातीय पद (Unlike terms)

(i) $7xy, \ 9y^2, \ -2xyz$ (ii) $8mn, \ 8m^2n^2, \ 8m^3n$

बैजिक व्यंजकों के प्रकार (Types of algebraic expressions)

व्यंजक के पदों की संख्या के आधार पर व्यंजकों का नाम निश्चित होता है। एक पद होने पर एकपदी, दो पद होने पर द्विपद, तीन पद होने पर त्रिपद। तीन से अधिक पद होने पर उन्हें बहुपद कहा जाता है।

एकपदी व्यंजक	द्विपद व्यंजक	त्रिपद व्यंजक	बहुपद व्यंजक
• $4x$	• $2x - 3y$	• $a + b + c$	• $a^3 - 3a^2b + 3ab - b^3$
• $\frac{5}{6}m$	• $2l + 2b$	• $x^2 - 5x + 6$	• $4x^4 - 7x^2 + 9 - 5x^3 - 16x$
• -7	• $3mn - 5m^2n$	• $8a^3 - 5a^2b + c$	• $5x^5 - \frac{1}{2}x + 8x^3 - 5$

प्रश्नसंग्रह 32

⊙ नीचे दिए गए व्यंजकों के पदों की संख्या के आधार पर एकपदी, द्विपद, त्रिपद तथा बहुपद व्यंजक में वर्गीकरण करो।

(i) $7x$ (ii) $5y - 7z$ (iii) $3x^3 - 5x^2 - 11$ (iv) $1 - 8a - 7a^2 - 7a^3$

(v) $5m - 3$ (vi) a (vii) 4 (viii) $3y^2 - 7y + 5$

आओ, थोड़ा याद करें

बैजिक व्यंजकों का योगफल (Addition of algebraic expressions)

✱ सजातीय एकपदियों का योगफल (Addition of monomials)

उदा. 3 अमरूद + 4 अमरूद = (3 + 4) अमरूद = 7 अमरूद   **उदा.** $3x + 4x = (3 + 4)\ x = 7x$

सजातीय पदों का योगफल, एक ही प्रकार की वस्तुओं के योगफल की तरह करते हैं।

उदा. जोड़ो।

(i) $-\ 3x - 8x + 5x = (-\ 3 - 8 + 5)x = -\ 6x$

(ii) $\frac{2}{3}ab - \frac{5}{7}ab = (\frac{2}{3} - \frac{5}{7})\ ab = \frac{-1}{21}\ ab$

(iii) $-\ 2p^2 + 7p^2 = (-\ 2 + 7)p^2 = 5p^2$

> थोड़ा सोचो
> $3x + 4y$ = कितना?
> 3 अमरूद + 4 आम = 7 अमरूद ?
> $7m - 2n = 5m$?

✱ द्विपद व्यंजकों का योगफल (Addition of binomial expressions)

क्षैतिज विन्यास

उदा. $(2x + 4y) + (3x + 2y)$

$= 2x + 3x + 4y + 2y$

$= 5x + 6y$

उध्वार्धर विन्यास

$$\begin{array}{rr} & 2x + 4y \\ + & 3x + 2y \\ \hline & 5x + 6y \end{array}$$

सजातीय पदों का योगफल ज्ञात करते समय उन पदों के गुणांकों को जोड़कर उसके आगे चरांक लिखते हैं।

उदा. जोड़ो $9x^2y^2 - 7xy$; $3x^2y^2 + 4xy$

क्षैतिज विन्यास

$(9x^2y^2 - 7xy) + (3x^2y^2 + 4xy)$

$= 9x^2y^2 - 7xy + 3x^2y^2 + 4xy$

$= (9x^2y^2 + 3x^2y^2) + (-\ 7xy + 4xy)$

$= 12x^2y^2 - 3xy$

उध्वार्धर विन्यास

$$\begin{array}{rr} & 9x^2y^2 - 7xy \\ + & 3x^2y^2 + 4xy \\ \hline & 12x^2y^2 - 3xy \end{array}$$

सावधानी बरतें

$3x + 7y$ सजातीय पद नहीं हैं इसलिए $3x + 7y$ या $7y + 3x$ ऐसे ही लिखते हैं।

प्रश्नसंग्रह 33

⊙ जोड़ो।

(i) 9p + 16q ; 13p + 2q   (ii) 2a + 6b + 8c; 16a + 13c + 18b

(iii) $13x^2 - 12y^2$; $6x^2 - 8y^2$ (iv) $17a^2b^2$ + 16c ; 28c $- 28a^2b^2$

(v) $3y^2 - 10y + 16$; $2y - 7$ (vi) $-\ 3y^2 + 10y - 16$; $7y^2 + 8$

आओ, समझें

बैजिक व्यंजकों का घटाव (Subtraction of algebraic expressions)

किसी पूर्णांक में से दूसरा पूर्णांक घटाने का अर्थ है, पहले पूर्णांक में दूसरे पूर्णांक की विपरीत संख्या जोड़ना। इस नियम का उपयोग करते हुए हम बैजिक व्यंजकों को घटाने की संक्रिया करेंगे।

उदा. $18 - 7$

$= 18 + (-7) = 11$

उदा. $9x - 4x$

$= [9 + (-4)]x = 5x$

उदा. पहले व्यंजक में से दूसरा व्यंजक घटाओ।

$16x + 23y + 12z$; $9x - 27y + 14z$

क्षैतिज विन्यास

$(16x + 23y + 12z) - (9x - 27y + 14z)$

$= 16x + 23y + 12z - 9x + 27y - 14z$

$= (16x - 9x) + (23y + 27y) + (12z - 14z)$

$= 7x + 50y - 2z$

उर्ध्वाधर विन्यास

$$\begin{array}{rrrr} & 16x & + 23y & + 12z \\ - & \oplus 9x & \ominus 27y & \oplus 14z \\ & - & + & - \\ \hline & 7x & + 50y & - 2z \end{array}$$

(जो व्यंजक घटाना हो उस व्यंजक के प्रत्येक पद का चिह्न बदलकर जोड़ें।)

प्रश्नसंग्रह 34

⊙ पहले व्यंजक में से दूसरा व्यंजक घटाओ।

(i) $(4xy - 9z)$; $(3xy - 16z)$ (ii) $(5x + 4y + 7z)$; $(x + 2y + 3z)$

(iii) $(14x^2 + 8xy + 3y^2)$; $(26x^2 - 8xy - 17y^2)$

(iv) $(6x^2 + 7xy + 16y^2)$; $(16x^2 - 17xy)$ (v) $(4x + 16z)$; $(19y - 14z + 16x)$

आओ, समझें

बैजिक व्यंजकों का गुणनफल (Multiplication of algebraic expressions)

✸ एकपदी को एकपदी से गुणा करना

उदा. $3x \times 12y$

$= 3 \times 12 \times x \times y$

$= 36xy$

उदा. $(-12x) \times 3y^2$

$= -12 \times 3 \times x \times y \times y$

$= -36xy^2$

उदा. $2a^2 \times 3ab^2$

$= 2 \times 3 \times a^2 \times a \times b^2$

$= 6a^3 b^2$

उदा. $(-3x^2) \times (-4xy)$

$= (-3) \times (-4) \times x^2 \times x \times y$

$= 12x^3y$

दो एकपदियों का गुणा करते समय सर्वप्रथम चिह्नों के साथ गुणांकों का गुणा करें, बाद में चरांकों का गुणा करो।

✸ द्विपद को एकपदी से गुणा करना

उदा. $x\,(x + y)$

$= x \times x \;+\; x \times y$

$= x^2 + xy$

उदा. $(7x - 6y) \times 3z = 7x \times 3z - 6y \times 3z$

$= 7 \times 3 \times x \times z \;-\; 6 \times 3 \times y \times z$

$= 21xz - 18yz$

✸ द्विपद को द्विपद से गुणा करना

उदा.

$$\begin{array}{rl}
 & 3x + 4y \\
\times & 5x + 7y \\
\hline
 & 15x^2 + 20xy \qquad \text{[5x से गुणा करने पर]} \\
 & \qquad + 21xy + 28y^2 \qquad \text{[7y से गुणा करने पर]} \\
\hline
 & 15x^2 + 41xy + 28y^2 \qquad \text{[जोड़ करने पर]}
\end{array}$$

$(3x + 4y)\;\;(5x + 7y)$

$= 3x\,(5x + 7y) + 4y\,(5x + 7y)$

$= 3x \times 5x + 3x \times 7y + 4y \times 5x + 4y \times 7y$

$= 15x^2 + 21xy + 20xy + 28y^2$

$= 15x^2 + 41xy + 28y^2$

उदा. किसी आयताकार खेत की लंबाई $(2x + 7)$ मी तथा चौड़ाई $(x + 2)$ मी है तो आयत का क्षेत्रफल ज्ञात करो।

हल : आयताकार खेत का क्षेत्रफल = लंबाई × चौड़ाई $= (2x + 7) \times (x + 2)$

$= 2x\,(x + 2) + 7\,(x + 2)$

$= 2x^2 + 11x + 14$

आयताकार खेत का क्षेत्रफल = $(2x^2 + 11x + 14)$ वर्गमी/ मी^{2}

प्रश्नसंग्रह 35

1. गुणा करो।

   (i) $16xy \times 18xy$ (ii) $23xy^2 \times 4yz^2$

   (iii) $(12a + 17b) \times 4c$ (iv) $(4x + 5y) \times (9x + 7y)$

2. किसी आयत की लंबाई $(8x + 5)$ सेमी और चौड़ाई $(5x + 3)$ सेमी हो तो उस आयत का क्षेत्रफल ज्ञात करो।

आओ, थोड़ा याद करें

एक चरांकवाले समीकरण (Equations in one variable)

- निम्नलिखित समीकरण हल करो।

  (1) $x + 7 = 4$ (2) $4p = 12$ (3) $m - 5 = 4$ (4) $\frac{t}{3} = 6$

आओ, समझें

उदा. $2x + 2 = 8$

$\therefore\; 2x + 2 - 2 = 8 - 2$

$\therefore\; 2x = 6$

$\therefore\; x = 3$

उदा. $3x - 5 = x - 17$

$3x - 5 + 5 - x = x - 17 + 5 - x$

$\therefore\; 2x = -12$

$\therefore\; x = -6$

उदा. किसी आयत की लंबाई इसकी चौड़ाई के दुगने से 1 सेमी अधिक हैं। उस आयत की परिमिति 50 सेमी हो तो उसकी लंबाई कितनी होगी ?

हल : मानो कि आयत की चौड़ाई x सेमी

आयत की लंबाई $(2x + 1)$ सेमी होगी ।

$2 \times$ लंबाई $+ 2 \times$ चौड़ाई $=$ आयत की परिमिति

$2\ (2x + 1) + 2x = 50$

$\therefore\ 4x + 2 + 2x = 50$

$\therefore\ 6x + 2 = 50$

$\therefore\ 6x = 50 - 2$

$\therefore\ 6x = 48$

$\therefore\ x = 8$

आयत की चौड़ाई 8 सेमी है।

आयत की लंबाई $= 2x + 1 = 2 \times 8 + 1$

$\therefore$ आयत की लंबाई $= 17$ सेमी है।

उदा. कोई प्राकृत संख्या तथा उसके बाद की क्रमिक प्राकृत संख्या का योगफल 69 है तो वे संख्या कौन-सी हैं ?

हल : मानो यह प्राकृत संख्या x

उसकी अगली क्रमिक प्राकृत संख्या $x + 1$

$(x) + (x + 1) = 69$

$\therefore\ x + x + 1 = 69$

$\therefore\ 2x + 1 = 69$

$\therefore\ 2x = 69 - 1$

$\therefore 2x = 68$

$\therefore\ x = 34$

प्राकृत संख्या $= 34$

अगली क्रमिक प्राकृत संख्या $= 34 + 1$

$= 35$

ध्यान में रखो :

हल किए गए उदाहरणों से पता चलता है कि कोई पद समीकरण '=' चिह्न की एक तरफ से दूसरी तरफ ले जाने पर उसका चिह्न बदल जाता है ।

प्रश्नसंग्रह 36

1. $(3x - 11y) - (17x + 13y)$ हल करो और उचित विकल्प चुनो।
   (i) $7x - 12y$ (ii) $-14x -54y$ (iii) $-3\ (5x +4y\ )$ (iv) $-2\ (7x + 12y\ )$
2. $(23\ x^2\ y^3z) \times (-15x^3yz^2)$ का उत्तर .... होगा।
   (i) $-345\ x^5\ y^4\ z^3$ (ii) $345\ x^2\ y^3\ z^5$ (iii) $145\ x^3\ y^2\ z$ (iv) $170\ x^3\ y^2\ z^3$
3. नीचे दिए गए समीकरण हल करो।
   (i) $4x + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$ (ii) $10 = 2y + 5$ (iii) $5m - 4 = 1$
   (iv) $6x - 1 = 3x + 8$ (v) $2\ (x - 4) = 4x + 2$ (vi) $5\ (x + 1) = 74$
4. राकेश की आयु सानिया की आयु से 5 वर्ष कम है। उनकी आयु का योग 27 वर्ष हो तो प्रत्येक की आयु कितनी है ?
5. किसी वन में अशोक के जितने वृक्ष हैं उससे 60 वृक्ष अधिक जामुन के हैं। दोनों प्रकार के कुल 200 वृक्ष हैं तो जामुन के कितने वृक्ष हैं ?
6. शुभांगी के पास 50 रुपये के जितने नोट हैं, उससे दुगने 20 रुपये के नोट हैं। उसके पास कुल 2700 रुपये हों तो बताओ 50 रुपये के कितने नोट हैं ?

7*. विराट के द्वारा बनाए गए रन रोहित के रनों से दुगुने हैं। दोनों के द्वारा बनाए गए रनों का योग द्विशतक से दो कम हो तो प्रत्येक ने कितने रन बनाए ?

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 1

1. नीचे दिए गए उदाहरण हल करो।

   (i) $(-16) \times (-5)$ (ii) $(72) \div (-12)$ (iii) $(-24) \times (2)$

   (iv) $125 \div 5$ (v) $(-104) \div (-13)$ (vi) $25 \times (-4)$

2. अभाज्य गुणनखंड ज्ञात कर नीचे दी गई संख्याओं का मसावि तथा लसावि ज्ञात करो।

   (i)75, 135 (ii) 114, 76 (iii) 153, 187 (iv) 32, 24, 48

3*. संक्षिप्त रूप दो।

   (i) $\frac{322}{391}$ (ii) $\frac{247}{209}$ (iii) $\frac{117}{156}$

4. नीचे दी गई संख्याओं के वर्गमूल ज्ञात करो।

   (i) 784 (ii) 225 (iii) 1296 (iv) 2025 (v) 256

5. किसी चुनाव में चार केंद्र हैं। प्रत्येक केंद्र पर मतदान करने वाले स्त्रियों तथा पुरुषों की संख्या तालिका में नीचे दी गई है। इस जानकारी के आधार पर संयुक्त स्तंभालेख खींचो।

मतदान केंद्र	नवोदय विद्यालय	विद्यानिकेतन शाला	सिटी हाइस्कूल	एकलव्य शाला
स्त्रियाँ	500	520	680	800
पुरुष	440	640	760	600

6. निम्न पदावली हल करो।

   (i) $45 \div 5 + 20 \times 4 - 12$ (ii) $(38 - 8) \times 2 \div 5 + 13$

   (iii) $\frac{5}{3} + \frac{4}{7} \div \frac{32}{21}$ (iv) $3 \times \{ 4 [85 + 5 - (15 \div 3)] + 2 \}$

7. हल करो।

   (i) $\frac{5}{12} + \frac{7}{16}$ (ii) $3\frac{2}{5} - 2\frac{1}{4}$ (iii) $\frac{12}{5} \times \frac{(-10)}{3}$ (iv*) $4\frac{3}{8} \div \frac{25}{18}$

8. ΔABC की रचना करो, जिसमें $m\angle A = 55^\circ$, $m\angle B = 60^\circ$ तथा $l(AB) = 5.9$ सेमी हो।

9. ΔXYZ की रचना करो, जिसमें $l(XY) = 3.7$ सेमी $l(YZ) = 7.7$ सेमी, $l(XZ) = 6.3$ सेमी हो।

10. ΔPQR की रचना करो, जिसमें $m\angle P = 80^\circ$, $m\angle Q = 70^\circ$, $l(QR) = 5.7$ सेमी हो।

11. दिए गए माप के आधार पर ΔEFG की रचना करो, जिसमें $l(FG) = 5$ सेमी, $m\angle EFG = 90^\circ$, $l(EG) = 7$ सेमी हों।

12. ΔLMN में $l(LM) = 6.2$ सेमी, $m\angle LMN = 60^\circ$ तथा $l(MN) = 4$ सेमी है तो ΔLMN की रचना करो।

13. नीचे दिए गए कोणों के कोटिपूरक कोणों के माप लिखो।

   (i) 35° (ii) a° (iii) 22° (iv) $(40-x)^\circ$

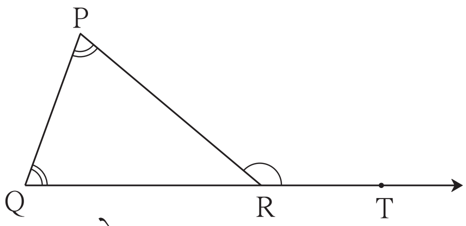
14. नीचे दिए गए कोणों के संपूरक कोणों के माप लिखो।

   (i) 111° (ii) 47° (iii) 180° (iv) $(90-x)^\circ$

15. निम्नलिखित आकृतियाँ बनाओ।

   (i) संलग्न कोणों की जोड़ियाँ। (ii) ऐसे संपूरक कोण जो संलग्न कोण न हों।

   (iii) दो संलग्न कोटिपूरक कोणों की जोड़ी।

16. 

ΔPQR में $\angle P$ तथा $\angle Q$ के माप समान है और $m\angle PRQ = 70^\circ$ तो निम्नलिखित कोणों के माप ज्ञात करो।

(i) $m\angle PRT$ (ii) $m\angle P$ (iii) $m\angle Q$

17. सरल रूप दो।

(i) $5^4 \times 5^3$ (ii) $\left(\frac{2}{3}\right)^6 \div \left(\frac{2}{3}\right)^9$ (iii) $\left(\frac{7}{2}\right)^8 \times \left(\frac{7}{2}\right)^{-6}$ (iv) $\left(\frac{4}{5}\right)^2 \div \left(\frac{5}{4}\right)$

18. मान ज्ञात करो।

(i) $17^{16} \div 17^{16}$ (ii) 10^{-3} (iii) $(2^3)^2$ (iv) $4^6 \times 4^{-4}$

19. हल करो।

(i) $(6a-5b-8c) + (15b+2a-5c)$ (ii) $(3x+2y)(7x-8y)$

(iii) $(7m-5n) - (-4n-11m)$ (iv) $(11m-12n+3p) - (9m+7n-8p)$

20. नीचे दिए गए समीकरण हल करो।

(i) $4(x + 12) = 8$ (ii) $3y + 4 = 5y - 6$

बहुवैकल्पिक प्रश्न

नीचे दिए गए प्रश्नों के वैकल्पिक उत्तर दिए हैं उन उत्तरों में से उचित विकल्प चुनो।

1. त्रिभुज के तीनों कोणों के समद्विभाजक संगामी होते हैं। उनके संगमन बिंदु को .... कहते हैं।

(i) परिकेंद्र (ii) शीर्षबिंदु (iii) अंतःकेंद्र (iv) प्रतिच्छेदन बिंदु

2. $\left[\left(\frac{3}{7}\right)^{-3}\right]^4$ = ...

(i) $\left(\frac{3}{7}\right)^{-7}$ (ii) $\left(\frac{3}{7}\right)^{-10}$ (iii) $\left(\frac{7}{3}\right)^{12}$ (iv) $\left(\frac{3}{7}\right)^{20}$

3. $5 \div \left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{3}$ का सरल रूप .... है।

(i) 3 (ii) 5 (iii) 0 (iv) $\frac{1}{3}$

4. $3x - \frac{1}{2} = \frac{5}{2} + x$ इस समीकरण का हल .... है।

(i) $\frac{5}{3}$ (ii) $\frac{7}{2}$ (iii) 4 (iv) $\frac{3}{2}$

5*. निम्नलिखित में से किस पदावली का मान 37 है ?

(i) $10 \times 3 + (5 + 2)$ (ii) $10 \times 4 + (5 - 3)$

(iii) $8 \times 4 + 3$ (iv) $(9 \times 3) + 2$

❑❑❑

9 समानुपात और विलोमानुपात

विभाग दूसरा

आओ, चर्चा करें

समानुपात (Direct proportion)

हमने पिछली कक्षा में देखा है कि दो संख्याओं की तुलना कर अनुपात के रूप में किस प्रकार लिखते है।

उदा. नीचे दिए चित्र देखो। खींचे गए व्यास द्वारा वृत्त के भागों को दिखाया गया है।

(A) (B) (C) (D)

यहाँ पर हमें व्यासों की संख्या तथा उनके कारण होने वाले वृत्त के भागों की संख्या में कौन-सा संबंध दिखाई देता है ?

- आकृति (A) में **एक** व्यास के कारण वृत्त के $\boxed{}$ भाग हुए हैं।
- आकृति (B) में **दो** व्यासों के कारण वृत्त के $\boxed{}$ भाग हुए हैं।
- आकृति (D) में **चार** व्यासों के कारण वृत्त के $\boxed{}$ भाग हुए हैं।

$$\frac{\text{वृत्त के व्यासों की संख्या}}{\text{वृत्त के भागों की संख्या}} = \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8}$$

यहाँ पर व्यासों की संख्या तथा उनके द्वारा बने भागों की संख्या का अनुपात स्थिर है ।

उदा. किसी नगरपालिका की पाठशाला के विद्यार्थियों को प्राप्त कॉपियों की संख्या नीचे तालिका में दिखाई गई है।

विद्यार्थी	15	12	10	5
कॉपियाँ	90	72	60	30

$$\frac{\text{विद्यार्थियों की संख्या}}{\text{कॉपियों की संख्या}} = \frac{15}{90} = \frac{12}{72} = \frac{10}{60} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$$

अर्थात यह अनुपात 1:6 यह स्थिर अथवा स्थायी (constant) है।

उपर्युक्त दोनों उदाहरणों में दिखाई देता है कि व्यासों की संख्या बढ़ने पर भागों की संख्या बढ़ती है । विद्यार्थियों की संख्या कम होने पर कॉपियों की संख्या भी कम होती है। व्यासों की संख्या तथा वृत्त के भागों की संख्या समान अनुपात में है। उसी प्रकार विद्यार्थियों की संख्या तथा कापियों की संख्या भी समान अनुपात में हैं।

उपक्रम :
- मोटर साइकिल में भरा पेट्रोल और उसके द्वारा तय की गई दूरी समानुपात में है क्या ? विचार करो।
- विज्ञान में और दैनंदिन व्यवहार के समान अनुपात में बदलने वाली संख्याओं के उदाहरण दे सकते हैं क्या ? उसकी चर्चा करो।

उदा. 10 पेन का मूल्य 60 रुपये हो तो ऐसी 13 पेन का मूल्य कितना होगा ?

हल : 13 पेन का मूल्य ज्ञात करना है। मानो कि 13 पेन का मूल्य x रुपये है ।

पेन की संख्या तथा उनका मूल्य समानुपात में है

अतः अनुपात रूप में दिखाकर समीकरण प्राप्त करेंगे।

$$\frac{10}{60} = \frac{13}{x}$$

$\therefore$ $10x = 780$ (दोनों पक्षों में $60\,x$ से गुणा करने पर)

$x = 78$

13 पेन का मूल्य 78 रुपये है।

प्रश्नसंग्रह 37

1. 7 किग्रा प्याज का मूल्य 140 रुपये हैं, तो 12 किग्रा प्याज का मूल्य कितना ?
2. 600 रुपयों में 15 घास की गठ्ठियाँ मिलती हैं, तो 1280 रुपयों में कितनी घास की गठ्ठियाँ मिलेंगी ?
3. प्रतिदिन 9 गायों को 13 कि 500 ग्राम पूरक आहार लगता है, उसी अनुपात में 12 गायों को कितना आहार लगेगा ?
4. 12 क्विंटल सोयाबीन का मूल्य 36,000 रुपये हैं तो 8 क्विंटल सोयाबीन का मूल्य कितना ?
5. दो मोबाइल का मूल्य 16,000 रुपये है। ऐसे 13 मोबाइल खरीदे गए तो उनका कुल मूल्य कितना होगा ?

आओ, समझें

विलोमानुपात (Inverse proportion)

वृक्षारोपण हेतु 90 गड्ढे खोदने हैं। इस कार्य के लिए कई स्वयंसेवक एकत्र हुए हैं। एक स्वयंसेवक प्रतिदिन 1 गड्ढा तैयार करता हैं।

15 स्वयंसेवकों को 90 गड्ढे खोदने में $\frac{90}{15} = 6$ दिन लगेंगे।

10 स्वयंसेवकों को 90 गड्ढे खोदने में $\frac{90}{10} = 9$ दिन लगेंगे।

स्वयंसेवकों की संख्या और गड्ढे खोदने में लगे दिनों की संख्या में समान अनुपात है क्या ?

स्वयंसेवकों की संख्या कम होने पर दिनों की संख्या **बढ़ती** है। इसके विपरीत स्वयंसेवकों की संख्या अधिक होने पर दिनों की संख्या कम होती है। स्वयंसेवक और दिन इनकी संख्याओं का गुणनफल स्थिर है। ये संख्याएँ विलोमानुपात (उत्क्रम) में हैं, ऐसा कहा जाता है।

उदा. समझो सुधा को किसी संग्रह के 48 उदाहरण हल करने हैं। प्रतिदिन 1 उदाहरण हल किया गया तो संग्रह पूरा करने में 48 दिन लगते हैं। प्रतिदिन 8 उदाहरण हल किए गए तो उसे संग्रह पूरा करने में $\frac{48}{8} = 6$ दिन लगते हैं। वह प्रतिदिन 12 उदाहरण हल करे तो उसे $\frac{48}{12} = 4$ दिन लगेंगे।

प्रतिदिन हल किए गए उदाहरण और लगने वाले दिन विलोमानुपात में हैं। उनका गुणनफल स्थिर है।

$8 \times 6 = 12 \times 4 = 48 \times 1$ इस पर ध्यान दो।

उदा. एक बड़ी दीवार बनाने में 15 मजदूरों को 8 घंटे लगते हैं, तो 12 मजदूर उसी काम को कितने घंटो में पूरा करेंगे ?

हल : मजदूरों की संख्या बढ़ने पर काम के घंटे कम होते हैं।

मजदूरों की संख्या तथा उनको लगने वाले समय का अनुपात विलोमानुपात है।

मजदूरों की संख्या और दीवार में लगने वाला समय, इनका गुणनफल स्थिर हैं।

अब x चरांक का उपयोग करते हुए हल करेंगे।

मानो 12 मजदूरों को x घंटे लगते हैं।

15 मजदूरों को 8 घंटे लगते हैं।

मानो 12 मजदूरों को x घंटे लगते हैं।

$$12 \times x = 15 \times 8$$
$$\therefore \quad 12x = 120$$
$$\therefore \quad x = 10$$

इस तरह 12 मजदूरों को दीवार बनाने में 10 घंटे लगेंगे।

उदा. किसी कक्षा में 40 पृष्ठों का हस्तलिखित अंक बनाना प्रारंभ किया। एक विद्यार्थी को यह अंक तैयार करने में 80 दिन लगते हैं तो 4 विद्यार्थियों को यही अंक तैयार करने में कितने दिन लगेंगे ?

हल : एक ही काम अधिक विद्यार्थियों के मिलकर करने पर दिन कम लगेंगे अर्थात विद्यार्थी संख्या तथा दिनों की संख्या में विलोमानुपात है। मानो कि 4 विद्यार्थियों को x दिन लगते हैं।

1 विद्यार्थियों को 80 दिन लगते हैं ।

विद्यार्थी	दिन
1	80
4	x

$$4x = 80 \times 1$$
$$x = \frac{80}{4}$$
$$x = 20$$

$\therefore$ 4 विद्यार्थियों को 20 दिन लगेंगे।

उदा. किसी विद्यालय के 7 वीं कक्षा के विद्यार्थी सैर के लिए बस से किसी खेत में गए। उस दौरान आए कुछ अनुभवों को देखेंगे। प्रत्येक अनुभव की संख्या समानुपात में हैं या विलोमानुपात में है, लिखो।

- सैर के लिए प्रत्येक विद्यार्थी से खर्च हेतु 60 रुपये लिए गए।

  कुल 45 विद्यार्थी थे इसलिए $\boxed{}$ रुपये जमा हुए।

  यदि 50 विद्यार्थी होते तो $\boxed{}$ रुपये जमा हुए।

  विद्यार्थियों की संख्या तथा जमा रकम (राशि) में .... अनुपात है।

- विद्यालय के पास के मिठाईवाले ने सैर के लिए 90 लड्डू दिए।

  45 विद्यार्थी सैर में आए तब प्रत्येक को $\boxed{}$ लड्डू मिले।

  30 विद्यार्थी सैर में आए होते तो प्रत्येक को $\boxed{}$ लड्डू मिलते।

  विद्यार्थियों की संख्या और प्रत्येक को मिलने वाले लड्डू में .... अनुपात है।

- सैर का स्थान विद्यालय से 120 किमी दूरी पर है।

  खेत में जाते समय बस की गति 40 किमी थी/ इसलिए $\boxed{}$ घंटे लगे।

  वापस आते समय बस की गति 60 किमी थी इसलिए $\boxed{}$ घंटे लगे।

  बस की गति और लगने वाले समय में .... अनुपात है।

- किसी किसान ने उसके बेर के वृक्षों से 180 बेर जमा किए।
  उसने 45 विद्यार्थियों को वितरित किए। प्रत्येक को $\boxed{\quad}$ बेर मिले।
  यदि 60 विद्यार्थी होते तो प्रत्येक को $\boxed{\quad}$ बेर मिलते।
  विद्यार्थियों की संख्या तथा प्रत्येक को मिलने वाले बेरों की संख्या में .... अनुपात है।

प्रश्नसंग्रह 38

1. किसी खेत की निराई करने में 5 मजदूरों को 12 दिन लगते हैं तो 6 मजदूरों को कितने दिन लगेंगे ? 15 मजदूरों को कितने दिन लगेंगे ?
2. मोहनराव प्रतिदिन एक पुस्तक के 40 पृष्ठ पढ़ते हैं। इस प्रकार वह पुस्तक 10 दिन में पूरी होती है। वही पुस्तक 8 दिन में पूरी करनी हो तो प्रतिदिन कितने पृष्ठ पढ़ने होंगे ?
3. मेरी की साइकिल चलाने की गति 6 किमी. प्रति घंटा है। उसे 12 किमी दूरी पर स्थित उसके मौसी के घर जाना है तो उसे कितना समय लगेगा ? यदि उसके साइकिल की गति 4 किमी / घंटा हो तो उसे कितना समय लगेगा ?
4. किसी शासकीय गोदाम के अनाज के संग्रह का अनाज 4000 लोग 30 दिन तक खाते हैं तो संग्रहित अनाज को 6000 लोग कितने दिन खाएँगे ?

आओ, समझें

भागीदारी (साझेदारी) (Partnership)

कोई व्यवसाय प्रारंभ करते समय जगह, कच्चा सामान आदि के लिए पैसे लगते हैं। इसी पैसों को पूँजी कहते है। कई बार दो या दो से अधिक व्यक्ति मिलकर पूँजी इकट्ठा करते हैं अर्थात वे व्यक्ति भागीदारी में निवेश कर व्यवसाय प्रारंभ करते हैं। भागीदारी के व्यवसाय में भागीदारों का बैंक में संयुक्त खाता होता है। उस व्यवसाय में पूँजी का जिस अनुपात में निवेश किया जाता है, उसी अनुपात में व्यवसाय में हुए लाभ या हानि को वितरित किया जाता है।

उदा. झेलम और अथर्व ने क्रमशः 2100 तथा 2800 रुपये की पूँजी लगाकर व्यवसाय प्रारंभ किया। उनको 3500 रु. लाभ हुआ। उसका वितरण कैसे करेंगे ?

हल : लगाई गई पूँजी का अनुपात 2100:2800 = $\frac{2100}{2800} = \frac{3}{4}$ लगाई गई पूँजी का अनुपात 3:4

लाभ का वितरण लगाई गई पूँजी के अनुपात में करना होता है। मानो झेलम का लाभ $3x$ और अथर्व का लाभ $4x$।

$\therefore\ 3x + 4x = 3500$ कुल लाभ 3500 है

$\therefore\ 7x = 3500$ $\therefore\ x = 500$

झेलम को $3x = 3 \times 500 = 1500$ और अथर्व को $4x = 4 \times 500 = 2000$ रु लाभ मिलेगा।

उदा. किसी व्यवसाय में चिन्मय तथा सैम ने 130000 रुपये की पूँजी 3:2 के अनुपात में निवेश की तो प्रत्येक का निवेश कितना था ? यदि व्यवसाय में 36000 रुपये लाभ हुआ तो प्रत्येक को कितना लाभ मिलेगा?

हल : चिन्मय तथा सैम के निवेश का अनुपात 3:2 है।

निवेश के **अनुपात** में लाभ का वितरण होता है अतः लाभ का अनुपात 3:2 होगा।

मानो कि चिन्मय का निवेश $3y$ तथा सैम का निवेश $2y$

$3y + 2y$ = कुल निवेश

$\therefore 5y = 130000$

$\frac{5y}{5} = \frac{130000}{5}$ ..... (5 से भाग देने पर)

$\therefore y = 26000$

$\therefore$ चिन्मय का निवेश $= 3y$

$= 3 \times 26000$

$= 78,000$ ₹

सैम का निवेश $= 2y$

$= 2 \times 26000$

$= 52000$ ₹

मानो कि चिन्मय का लाभ $3x$ और सैम का लाभ $2x$ माने $3x + 2x$ = कुल लाभ

$5x = 36000$

$\frac{5x}{5} = \frac{36000}{5}$..... (5 से भाग देने पर)

$\therefore x = 7200$

$\therefore$ चिन्मय का लाभ $= 3x$

$= 3 \times 7200$

$= 21600$ ₹

सैम का लाभ $= 2x$

$= 2 \times 7200$

$= 14400$ ₹

उदा. अब्दुल, सेजल और सोहम ने सायली को क्रमशः 30 रुपये, 70 रुपये तथा 50 रुपये दिए। सायली ने उसमें 150 रुपये मिलाकर कागज, रंग आदि वस्तुओं को खरीदा। उससे सभी ने ग्रिटिंग कार्ड बनाए और उन्हें बेचा। उन्हें कुल मिलाकर 420 रुपये लाभ हुआ तो प्रत्येक को मिला लाभ ज्ञात करो।

हल : चारों की कुल पूँजी 300 रुपये हैं। उसमें से 150 रुपये सायली के थे अर्थात आधी पूँजी उसकी थी। कुल लाभ 420 रुपये है। सायली का लाभ 420 रुपये का आधा अर्थात 210 रुपये हुआ। शेष 210 रुपये अब्दुल, सेजल और सोहम को बाँटना है।

अब्दुल, सेजल और सोहम की लगाई गई पूँजी क्रमशः 30 रुपये, 70 रुपये और 50 रुपये है।

लगाई गई पूँजी का अनुपात 30:70:50 है। अर्थात 3:7:5 तीनों को हुआ है लाभ ₹ 210

मानो कि उनका लाभ क्रमशः $3k$, $7k$, $5k$ है।

$3k + 7k + 5k = 210$

$\therefore 15k = 210$

$\therefore k = 14$

अब्दुल का लाभ $= 3k = 3 \times 14 = 42$ रुपये

सेजल का लाभ $= 7k = 7 \times 14 = 98$ रुपये, सोहम का लाभ $= 5k = 5 \times 14 = 70$ रुपये

उदा. सरिताबेन, आयेशा और मीनाक्षी ने क्रमशः 2400 रुपये, 5200 रुपये और 3400 रुपये निवेश कर एक व्यवसाय प्रारंभ किया। उन्हें इस व्यवसाय में 50% लाभ हुआ तो वे इस लाभ का वितरण कैसे करेंगे ? लाभ न लेकर अगले वर्ष के व्यवसाय के लिए पूँजी मिलाई तो अगले वर्ष प्रत्येक की हिस्सेदारी कितनी होगी ?

हल : कुल पूँजी $= 2400 + 5200 + 3400 = 11000$ रुपये

कुल पूँजी पर 50% लाभ हुआ।

$\therefore$ कुल लाभ $= \frac{11000 \times 50}{100} = 5500$ रुपये

निवेश के अनुपात में लाभ का वितरण करना है।

हम दो संख्याओं का अनुपात दोनों संख्याओं के सामान्य गुणनखंड से भाग देकर आसानी से प्राप्त करते हैं। उसी प्रकार दो-से-अधिक संख्याओं का अनुपात भी आसानी से कर सकते हैं।

हिस्सेदारी का अनुपात = 2400 : 5200 : 3400

= 24 : 52 : 34 (100 से भाग देने पर)

= 12 : 26 : 17 (2 से भाग देने पर)

मानो सरिताबेन का लाभ = 12p, आयेशा का लाभ = 26p, मीनाक्षी का लाभ = 17p

$\therefore$ 12p + 26p + 17p = 55p = 5500 प्रत्येक के लाभ का योग = कुल लाभ $\therefore p = \frac{5500}{55} = 100$

$\therefore$ सरिताबेन का लाभ = 12 × 100 = 1200 रुपये, आयेशा का लाभ = 26 × 100 = 2600 रुपये

मीनाक्षी का लाभ = 17 × 100 = 1700 रुपये,

लाभ न लेने पर पूँजी में मिलाने पर प्रत्येक की नई पूँजी

अगले वर्ष के लिए सरिताबेन की पूँजी = 2400 + 1200 = 3600 रुपये

अगले वर्ष के लिए आयेशा की पूँजी = 5200 + 2600 = 7800 रुपये

अगले वर्ष के लिए मीनाक्षी की पूँजी = 3400 + 1700 = 5100 रुपये

आओ, चर्चा करें

- उपर्युक्त उदाहरण में सरिताबेन, मीनाक्षी और आयेशा में से प्रत्येक ने लाभ न लेते हुए अपने निवेश में मिलाया तो अगले वर्ष उनके निवेश का अनुपात ज्ञात करो।

प्रश्नसंग्रह 39

1. सुरेश और रमेश ने 144000 रुपये निवेश कर 4:5 के अनुपात में एक भूखंड खरीदा। कुछ वर्ष पश्चात उसे बेचकर उन्हें 20% लाभ हुआ तो प्रत्येक को कितना लाभ हुआ ?
2. विराट और सम्राट ने क्रमशः 50000 रुपये और 120000 रुपये निवेश कर एक व्यवसाय प्रारंभ किया। इस व्यवसाय में उन्हें 20% हानि हुई तो प्रत्येक को कितनी हानि हुई ?
3. श्वेता, पीयूष और नचिकेत इन तीनों ने मिलकर सोलापुर चादर और टॉवेल बेचने का व्यवसाय 80000 रुपये निवेश करके प्रारंभ किया। उसमें से श्वेता की पूँजी 30000 रुपये थी और पीयूष की पूँजी 12000 रुपये थी। वर्ष के अंत में उन्हें 24% लाभ हुआ तो नचिकेत की हिस्सेदारी कितनी थी ? नचिकेत को लाभ की रकम कितनी मिलेगी ?
4. अ और ब ने मिले लाभ 24500 रुपये को 3:7 के अनुपात में बाँट लिया। प्रत्येक ने मिले लाभ की रकम का 2% रकम सैनिक कल्याण निधि में दी तो प्रत्येक ने कल्याण निधि में कितनी रकम दी ?

5*. जया, सीमा, निखिल और निलेश ने 3:4:7:6 के अनुपात में व्यवसाय के लिए 360000 रुपये पूँजी जमा की और हिस्सेदारी से व्यवसाय प्रारंभ किया। उस पूँजी में जया की कितनी रकम थी ? उन्हें इस व्यवहार में 12% लाभ हुआ तो निखिल के हिस्से में लाभ के कितने रुपये आएँगे ?

10 बैंक और साधारण ब्याज

आओ, थोड़ा याद करें

पैसों का व्यवहार करने वाली सरकारमान्य संस्था बैंक है। बैंक के कारण पैसों का नियोजन अर्थात आर्थिक नियोजन करना आसान होता है। बैंक में नकद रकम जमा करना या नकद रकम निकालने का व्यवहार किया जाता है। इसके लिए बैंक में खाता खोलना पड़ता है। बैंक में विविध प्रकार के खाते होते हैं।

आओ, समझें

विविध खाते

✸ चालू खाता (Current account)

चालू खाता मुख्यत: व्यापारियों और रोज पैसों का व्यवहार करने वालों के लिए होता है। इसमें खातेदार एक दिन में कई बार लेन देन कर सकता है । बैंक इस खाते के लिए पासबुक तथा माँग करने पर चेकबुक देता है। इस प्रकार के खाते में बैंक ब्याज नहीं देता। चेक की सहायता से बैंक में पैसे जमा कर सकते हैं या बैंक से पैसे निकाल सकते हैं।

✸ बचत खाता (Savings account)

खातेदार निश्चित रकम बैंक में जमा कर बचत खाता खोल सकता है। कुछ बैंकों में कुछ रकम जमा किए बिना भी खाता खोल सकते हैं। इस खाते में प्रतिदिन के जमा शेष रकम के आधार पर बैंक ब्याज देती है। कई बार निश्चित अवधि में कितनी बार रकम निकाल सकते हैं इसपर बंधन होता है। इस खाते के लिए बैंक पासबुक तथा माँग करने पर चेकबुक भी देती है।

✸ आवर्ती जमा खाता (Recurring deposite account)

इस खाते में प्रति माह कितनी रकम जमा करना है यह खातेदार निश्चित करता है। इस प्रकार के जमा रकम पर बैंक ब्याज देता हैं। यह ब्याज बचत खाते के ब्याज से अधिक होता है। इस खाते में खातेदार की अनिवार्य बचत होती है।

कई बार बैंक में संयुक्त खाता होना सुविधाजनक होता हैं। उदा. पति-पत्नी, पालक और पाल्य आदि । उसी प्रकार व्यवसाय में हिस्सेदारी, हाउसिंग सोसाइटी, सेवाभावी न्यास आदि के बैंक खाते एक-से-अधिक व्यक्तियों के नाम पर होना आवश्यक होता हैं।

✸ अवधि जमा खाता (Fixed deposit)

जमाकर्ता निश्चित रकम निश्चित अवधि के लिए बैंक में जमा करता है। इस प्रकार के जमा पर बैंक बचत खाते की अपेक्षा अधिक ब्याज देता है। अवधि जमा खाते में प्रत्येक बैंक में व्याज दर भिन्न हो सकता है। वरिष्ठ नागरिकों को नियमित दर से थोड़ा अधिक ब्याज मिलता है।

ए.टी.एम, क्रेडिट और डेबिट कार्ड : बैंक में न जाते हुए नकद रकम प्राप्त करने के लिए ATM (Automated teller machine) कार्ड का उपयोग होता हैं। नकद रकम के बिना (अलावा) व्यवहार करने के लिए क्रेडिट कार्ड और डेबिट कार्ड का उपयोग होता है। उपर्युक्त कार्ड खातेदार के निवेदन पर बैंक से मिल सकते हैं।

आओ, चर्चा करें

- तुमने बैंक की पासबुक देखी है क्या ?
  यहाँ पर बैंक पासबुक का एक पृष्ठ दिया गया है। उसमें दर्ज की गई बातों का निरीक्षण करो।

अनु. क्र. LINE NO.	दिनांक DATE	विवरण PARTICULARS	चेक क्रमांक CHEQUE No.	निकाली गई रकम AMOUNT WITHDRAWN	जमा की गई रकम AMOUNT DEPOSITED	बाकी जमा BALANCE
1.	2.2.2016	cash			1500.00	7000.00
2.	8.2.2016	cheque	232069		5000.00	12000.00
3.	12.2.2016	cheque	243965	3000.00		9000.00
4.	15.2.2016	self		1500.00		7500.00
5.	26.2.2016	interest			135.00	7635.00

- दिनांक 2.2.16 को बैंक में जमा की गई रकम $\boxed{}$ रुपये। शेष रकम $\boxed{}$ रुपये।
- दिनांक 12.2.16 को चेक क्रमांक 43965 से $\boxed{}$ रकम निकाली। शेष रकम $\boxed{}$ रुपये।
- दिनांक 26.2.16 को बैंक ने ब्याज (Interest) दिया है। उसकी रकम $\boxed{}$ रुपये।

बचत खाता और आवर्ती खाता के लिए पासबुक होती है। उस पासबुक में दिनांकानुसार जमा किए गए पैसे, निकाले गए पैसे तथा शेष पैसों का उल्लेख होता है।

उपक्रम : तुम्हारे घर के किसी बड़े व्यक्ति की अनुमति से उनकी पासबुक में दर्ज की गई बातों को समझो।

आओ, थोड़ा याद करें

सुविद्या ने संगणक खरीदने हेतु बैंक से 8 प्रतिशत प्रतिवर्ष ब्याज की दर से 1 वर्ष के लि 30000 रुपये कर्ज लिया। समय पूर्ण होने पर उसे रकम की अपेक्षा 2400 रुपये अधिक देने पड़े।

- इस जानकारी के आधार पर नीचे दिए गए चौखटों में संख्या लिखो।

मूलधन = ₹ $\boxed{}$, ब्याज की दर = ₹ $\boxed{}$, ब्याज = ₹ $\boxed{}$, अवधि = $\boxed{}$ वर्ष

बैंक में वापस की गई कुल रकम = 30000 + 2400 = ₹ $\boxed{}$

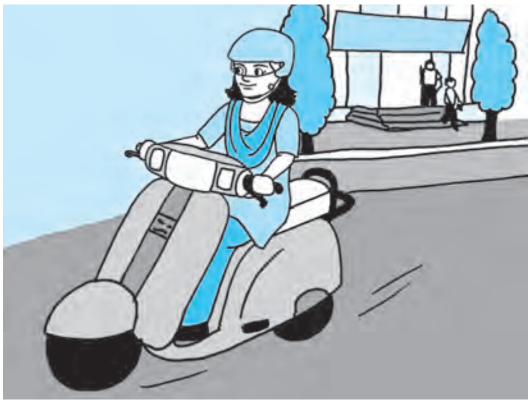
आओ, समझें

उपर्युक्त दिए गए उदाहरण में सुविद्या ने कुल कितनी रकम बैंक में जमा की यह ज्ञात करने के लिए मूलधन और ब्याज का योगफल किया गया। इस को मिश्रधन कहते हैं।

मूलधन + ब्याज = मिश्रधन

उदा. नेहा ने दुपहिया वाहन खरीदने हेतु बैंक से 12 प्र.श.प्र.व ब्याज की दर से ₹ 50000 कर्ज लिया। एक वर्ष पश्चात वह बैंक को कितनी रकम जमा करेगी ?

हल : इस उदाहरण में अवधि पूर्ण होने पर बैंक में जमा की जानेवाली रकम ज्ञात करनी है अर्थात मिश्रधन ज्ञात करना है। यहाँ मूलधन 50000 रुपये है। 12 प्र.श.प्र.व ब्याज की दर अर्थात 100 रु मूलधन का 1 वर्ष का व्याज 12 रुपये है।



ब्याज का मूलधन से अनुपात दो प्रकार से लिखकर समीकरण प्राप्त करेंगे।

मानो कि 50000 रुपये मूलधन पर मिलने वाला ब्याज x रुपये

100 रुपये मूलधन पर मिलने वाला ब्याज 12₹ ।

$$\frac{x}{50000} = \frac{12}{100}$$

$$\frac{x}{50000} \times 50000 = \frac{12}{100} \times 50000$$ (दोनों पक्षों को 50000 से गुणा करने पर)

$$x = 6000$$

(बैंक में जमा की जानेवाली रकम) मिश्रधन = मूलधन + ब्याज

= 50000 + 6000

∴ बैंक में जमा की जानेवाली रकम = ₹ 56000

उदा. 8 प्र.श.प्र.व ब्याज की दर से आकाश ने 25000 रुपये तीन वर्षों के लिए बैंक में जमा किया तो उसे प्रतिवर्ष मिला ब्याज तथा कुल ब्याज ज्ञात करो।

हल : इस उदाहरण में मूलधन 25000 रु , अवधि 3 वर्ष, ब्याज की दर 8%

100 रुपये मूलधन पर 8 रुपये ब्याज मिलता है। ∴ मानो कि 25000 रुपये मूलधन पर 1 वर्ष में x रुपये ब्याज है। ब्याज का मूलधन से अनुपात देखते हैं।

$$\frac{x}{25000} = \frac{8}{100}$$

$$\therefore \frac{x}{25000} \times 25000 = \frac{8}{100} \times 25000$$ (दोनों पक्षों में 25000 से गुणा करने पर)

$$\therefore x = 2000$$

आकाश को 1 वर्ष का मिला ब्याज = 2000 रुपये

आकाश को 3 वर्ष का मिला कुल ब्याज = 2000 × 3 = 6000 रुपये।

आओ, समझें

साधारण ब्याज के प्रश्नों को हल करते समय एक सूत्र का उपयोग किया जाता है। वह सूत्र हम देखेंगे।

प्रति वर्ष मूलधन कायम रखकर एक ही दर से ब्याज की गणना की जाती है। इस गणना को साधारण ब्याज की गणना कहते हैं। 'म' मूलधन, 'क' वर्ष के लिए तथा प्र.श.प्र.व दर 'द' हो तो मिलने वाला ब्याज ज्ञात करेंगे।

1 वर्ष के ब्याज तथा मूलधन का अनुपात देखेंगे।

$$\therefore \frac{\text{ब}}{\text{म}} = \frac{\text{द}}{100} \qquad \therefore \text{ब} = \frac{\text{म} \times \text{द}}{100}$$

$$\text{क वर्ष का ब्याज} = \text{ब} \times \text{क} = \frac{\text{म} \times \text{द} \times \text{क}}{100}$$

$$\therefore \text{कुल ब्याज} = \frac{\text{मूलधन} \times \text{दर} \times \text{काल (समय)}}{100}$$

इसके पूर्व प्रश्न को इस सूत्र की सहायता से हल करेंगे।

प्रश्न में म = 25000, द = 8, क = 3

$$\text{कुल ब्याज} = \frac{\text{म} \times \text{द} \times \text{क}}{100}$$

$$= \frac{25000 \times 8 \times 3}{100}$$

$$= 6000$$

कुल ब्याज 6000 रुपये हैं।

यह मैंने समझा

- कुल ब्याज $= \frac{\text{म} \times \text{द} \times \text{क}}{100}$ यहाँ म = मूलधन, द = ब्याज की दर, क = अवधि (काल) वर्ष में

उदा. $8\frac{1}{2}$ प्र.श.प्र.व की दर से संदीप भाई ने अपने पुत्र के शिक्षण के लिए 4 वर्षों के लिए 120000 रुपये शैक्षणिक कर्ज लिया तो उसने समय समाप्ति पश्चात बैंक को कितनी रकम वापस की ?

हल : इस उदाहरण में मूलधन 120000 रुपये हैं।

म = 120000, द $= 8\frac{1}{2} = 8.5$, क = 4

$$\therefore \text{कुल ब्याज} = \frac{\text{म} \times \text{द} \times \text{क}}{100} = \frac{120000 \times 8.5 \times 4}{100}$$

$$= \frac{120000 \times 85 \times 4}{100 \times 10}$$

$$= 120 \times 85 \times 4$$

$$= 408000$$

बैंक को वापस की गई रकम अर्थात मिश्रधन = 120000 + 40800 = 160800 रुपये

प्रश्नसंग्रह 40

1. रेहान ने 1500 रुपये पाठशाला की संचयिका में 9 प्र.श.प्र.व की दर से 2 वर्षों के लिए जमा किया तो समय समाप्ति के बाद उसे कितनी रकम मिलेगी ?
2. जेठालाल ने 10 प्र.श.प्र.व ब्याज की दर से 2,50,000 रुपये 5 वर्षों के लिए गृह कर्ज लिया। उसे प्रतिवर्ष कितना ब्याज देना होगा ? उन्हें बैंक में कुल कितनी रकम जमा करनी होगी ?

3* श्रीकांत ने 85,000 रुपये 7 प्र.श.प्र.व. ब्याज की दर से $2\frac{1}{2}$ वर्षों के लिए 'बचत' बैंक में जमा किए। अवधि पूर्ण होने पर उनको साधारण ब्याज से कितनी रकम मिलेगी ?

4. किसी ब्याज की दर से 5000 रुपये मूलधन का 4 वर्ष का ब्याज ₹ 1200 होता है तो उसी दर से उसी अवधि में ₹ 15000 मूलधन का ब्याज कितना होगा ?
5. पंकज ने 10 ₹ प्र.श.प्र.व. ब्याज की दर से 2 वर्षों के लिए 1,50,000 बँक में जमा किए तो समय समाप्ति के पश्चात उनको कुल कितनी रकम वापस मिलेगी ?

आओ, समझें

मूलधन, समय, दर, मिश्रधन में से तीन राशियाँ दीं हो तो चौथी राशि ज्ञात करना।
सूत्र में ज्ञात की जानेवाली राशि की संख्या हेतु अक्षर मानकर समीकरण बनाकर उदाहरण हल किया जा सकता है।

उदा. मूलधन = 25000 रुपये, मिश्रधन = 31,000 रुपये, समय = 4 वर्ष हो तो ब्याज दर कितनी होगी ?

मिश्रधन − मूलधन = ब्याज

31000 − 25000 = 6000

मूलधन = 25000 रुपये, समय = 4 वर्ष, ब्याज = 6000 रुपये,

अब सूत्र की सहायता से ब्याज दर ज्ञात करेंगे। दर = द मानो

$$\text{साधारण ब्याज} = \frac{\text{मूलधन} \times \text{दर} \times \text{समय (काल)}}{100}$$

$$6000 = \frac{25000 \times \text{द} \times 4}{100}$$

$$\text{द} = \frac{6000 \times 100}{25000 \times 4}$$

$\therefore$ द = 6 % (प्रतिशत) $\therefore$ ब्याज की दर = 6 प्र.श.प्र.व

उदा. 9 प्र.श.प्र.व साधारण ब्याज की दर से उन्मेष ने 5 वर्षों के लिए कुछ रकम बैंक से कर्ज ली। 5 वर्षों में उन्मेष ने बैंक में कुल 17400 रुपये जमा किए। तो उन्मेष द्वारा ली गई कर्ज की कुल रकम ज्ञात करो।

$$\text{ब्याज} = \frac{\text{मूलधन} \times \text{दर} \times \text{कालावधि}}{100}$$ इस सूत्र का उपयोग तुरंत नहीं कर सकते।

क्योंकि ब्याज तथा मूलधन दोनों ज्ञात नहीं हैं। 100 रुपये मूलधन पर 5 वर्ष का ब्याज 45 रुपये होता हैं। अतः 100 + 45 = 145 रुपये मिश्रधन होता है। अब मूलधन और मिश्रधन का अनुपात दर्शाकर समीकरण प्राप्त करेंगे।

उन्मेष का मूलधन म हो तो $\frac{\text{म}}{17400} = \frac{100}{145}$

$\therefore$ म = $\frac{100 \times 17400}{145} = 12000$

$\therefore$ उन्मेष का कुल कर्ज = 12000 रुपये है।

आओ, चर्चा करें

- सूत्र का उपयोग करते हुए नई पद्धति से समीकरण बनाकर यह उदाहरण हल कर सकते हैं क्या ?

प्रश्नसंग्रह 41

1. किसी दर (प्र.श.प.व.) से 1700 रुपये का 2 वर्ष का ब्याज 340 रुपये मिलता है तो ब्याज की दर ...... होगी।
   (i) 12 % (ii) 15 % (iii) 4 % (iv) 10 %
2. किसी दर से 3000 रुपयों का कुछ वर्षों का ब्याज 600 रुपये हो तो 1500 रुपये का उसी दर से उतनी ही अवधि का ब्याज कितने रुपये होगा ?
   (i) 300 रुपये (ii) 1000 रुपये (iii) 700 रुपये (iv) 500 रुपये
3. 9 % प्र.व. ब्याज की दर से जावेद ने 12000 रुपये कुछ वर्षों के लिए बैंक में जमा किए। वह प्रतिवर्ष ब्याज की रकम निकाल लेता था। अवधि पूर्ण होने पर उसे 17400 रुपये मिले तो उसने कितने वर्षों के लिए रकम जमा की थी ?

4*. लताबेन ने गृह उद्योग करने हेतु कुछ रकम 10 प्र.श.प्र.व की दर से $2\frac{1}{2}$ वर्षों के लिए बैंक से कर्ज ली। उन्हें कर्ज चुकाने के लिए कुल 10250 रुपये ब्याज दिया तों उनके दुवारा दी गई कर्ज की रकम ज्ञात करो।

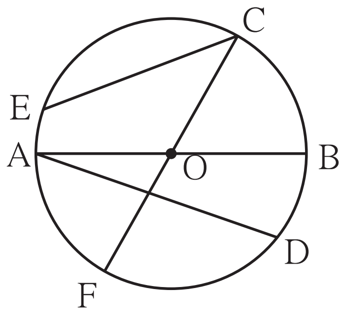
5. नीचे दी गई तालिका में रिक्त जगह भरो।

	मूलधन	ब्याज की दर (प्र.श.प्र.व.)	समय (काल)	ब्याज	मिश्रधन
(i)	4200	7%	3 वर्ष	......	......
(ii)	......	6%	4 वर्ष	1200	......
(iii)	8000	5%	......	800	......
(iv)	......	5%	......	6000	18000
(v)	......	$2\frac{1}{2}$ %	5 वर्ष	2400	......

उपक्रम : ✸ विविध बैंकों से साक्षात्कार कर उनके विविध खातों में दिए जाने वाले ब्याज की जानकारी लो।
✸ विद्यालय में शिक्षकों की सहायता से संचयिका (बचत बैंक) खाता खोलकर आर्थिक बचत करो।

11 वृत्त

आओ, थोड़ा याद करें



- संलग्न आकृति में वृत्त का निरीक्षण कर उसकी त्रिज्या, जीवा, व्यास पहचानो तथा उनके नाम लिखो।

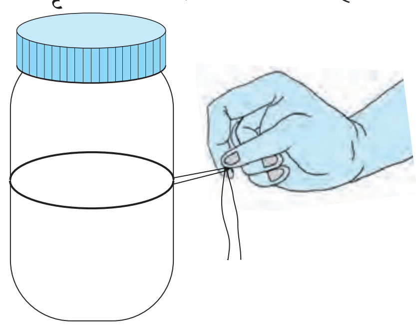
त्रिज्या				
जीवा				
व्यास				

वृत्त की परिधि (Circumference of a circle)

कृति I पानी की बेलनाकार बोतल को कागज पर रखकर उसके आधार से वृत्त खींचो। धागे की सहायता से वृत्त की परिधि नापो।

कृति II चूड़ी की परिधि धागे से नापो।

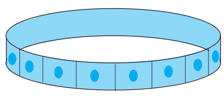
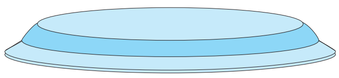
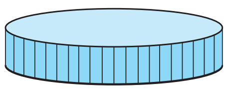
कृति III किसी एक वृत्ताकार वस्तु की परिधि धागे की सहायता से नापो।



आओ, समझें

परिधि और व्यास का संबंध

कृति 1 नीचे दी गई वस्तुओं की परिधि तथा व्यास नापकर परिधि का व्यास से अनुपात तालिका में लिखो।

अ. क्र.	वस्तु	परिधि	व्यास	परिधि का व्यास से अनुपात
1.	 चूड़ी	19 सेमी	6 सेमी	$\frac{19}{6} = 3.16$
2.	वृत्ताकार उलटी थाली 	....	....	....
3.	 बरनी (मर्तबान) का ढक्कन	....	....	....

तालिका में परिधि का व्यास से अनुपात जाँचो। आपकी समझ में क्या आता है ?

किसी वृत्त की परिधि का उसके व्यास से होने वाला अनुपात तीन गुने से थोड़ा अधिक होकर लगभग स्थिर रहता है। यह स्थिर संख्या π (पाय) इस ग्रीक अक्षर से दिखाई जाती है। महान गणिततज्ज्ञों ने अथक परिश्रम से सिद्ध किया है कि यह संख्या (π) परिमेय संख्या नहीं है।

व्यवहार में π का मान $\frac{22}{7}$ या 3.14 लिया जाता है।

उदाहरण में π का मान न दिए जाने पर $\pi = \frac{22}{7}$ लिया जाता है।

त्रिज्या 'r', व्यास 'd' तथा परिधि 'c' हो तो $\frac{\text{परिधि (c)}}{\text{व्यास (d)}} = \pi$ अर्थात $\boxed{c = \pi d}$

किंतु $d = 2r \quad \therefore c = \pi \times 2r$ अर्थात $\boxed{c = 2\pi r}$

उदा. किसी वृत्त का व्यास 14 सेमी है, तो उसकी परिधि ज्ञात करो।

हल : वृत्त का व्यास : $d = 14$ सेमी

वृत्त की परिधि $= \pi d$

$c = \frac{22}{7} \times 14$

$\therefore$ वृत्त की परिधि = 44 सेमी

उदा. किसी वृत्त की त्रिज्या 35 सेमी है, तो उसकी परिधि ज्ञात करो।

हल : वृत्त की त्रिज्या : $r = 35$ सेमी

वृत्त की परिधि $= 2\pi r$

$c = 2 \times \frac{22}{7} \times 35$

$\therefore$ वृत्त की परिधि = 220 सेमी

उदा. किसी वृत्त की परिधि 198 सेमी है, तो उसकी त्रिज्या तथा व्यास ज्ञात करो।

हल : वृत्त की परिधि, $c = 2\pi r$

$$198 = 2 \times \frac{22}{7} \times r$$

$$r = 198 \times \frac{1}{2} \times \frac{7}{22}$$

त्रिज्या = 31.5 सेमी

$\therefore$ व्यास = 2 × 31.5 = 63 सेमी

उदा. किसी वृत्त की परिधि 62.80 सेमी है। तो उसका व्यास ज्ञात करो। ($\pi = 3.14$)

हल : वृत्त की परिधि, $c = \pi d$

$$62.80 = 3.14 \times d$$

$$\frac{62.80}{3.14} = d$$

$$20 = d$$

$\therefore$ व्यास = 20 सेमी

उदा. किसी वृत्ताकार भूखंड की त्रिज्या 7.7 मीटर है। उस भूखंड के चारों ओर तार की तीन बाड़ लगाई गईं। बाड़ लगाने के लिए 50 रुपये प्रतिमीटर की दर से कितना खर्च आएगा ? ज्ञात करो।

हल : वृत्ताकार भूखंड की परिधि $= 2\pi r = 2 \times \frac{22}{7} \times 7.7 = 48.4$

1 बाड़ में लगने वाली तार की लंबाई = 48.4 मीटर

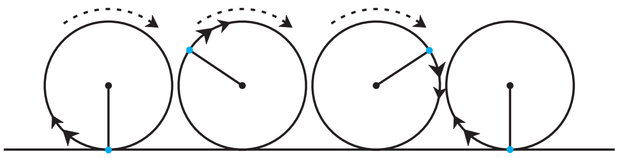
1 बाड़ में लगने वाला खर्च = तार की लंबाई × दर प्रतिमीटर

= 48.4 × 50

= 2420 रुपये

$\therefore$ तीन वृत्ताकार बाड़ को लगने वाला खर्च = 3 × 2420 = 7260 रुपये

उदा. किसी बस के पहिए का व्यास 0.7 मी है। दो गाँवों के बीच की 22 किमी दूरी तय करने में पहिए के कितने चक्कर (फेरे) लगेंगे ?



हल : पहिए की परिधि $= \pi d$

$$= \frac{22}{7} \times 0.7$$

$$= 2.2 \text{ मी}$$

> सजातीय राशियों का अनुपात ज्ञात करते समय उनकी इकाइयाँ समान होनी चाहिए।
>
> 22 किमी = $22 \times 1000 = 22000$ मीटर

2.2 मीटर दूरी तय करने पर पहिए का 1 चक्कर पूरा होता है। (1 चक्कर = 1 परिधि)

$$\text{पहिए के कुल चक्कर (फेरे)} = \frac{\text{अंतर}}{\text{परिधि}} = \frac{22000}{2.2} = \frac{220000}{22} = 10000$$

22 किमी दूरी तय करने में बस के पहिए को 10000 चक्कर (फेरे) लगेंगे।

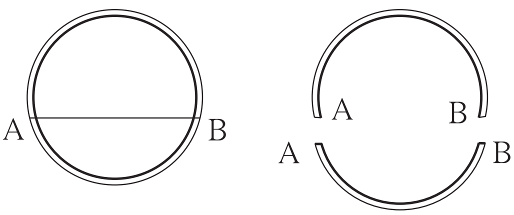
प्रश्नसंग्रह 42

1. नीचे दी गई तालिका पूर्ण करो।

अ.क्र.	त्रिज्या (r)	व्यास (d)	परधि (c)
(i)	7 सेमी	....	....
(ii)	....	28 सेमी	....
(iii)	....	....	616 सेमी
(iv)	....	....	72.6 सेमी

2. किसी वृत्त की परिधि 176 सेमी है। तो उसकी त्रिज्या ज्ञात करो।
3. किसी वृत्ताकार बाग की त्रिज्या 56 मीटर है। बाग के चारों ओर चार फेरों वाली तार की बाड़ लगाने के लिए 40 रुपये प्रतिमीटर की दर से कुल कितना खर्च आएगा ?
4. किसी बैलगाड़ी के पहिए का व्यास 1.4 मीटर है। उस बैलगाडी को 1.1 किलोमीटर दूरी तय करने में उस पहिए के कितने फेरे होंगे ?

आओ, थोड़ा याद करें

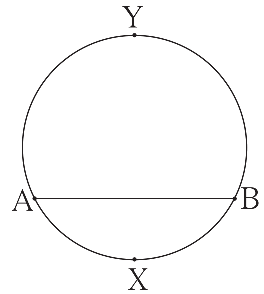


वृत्तखंड़ (Arc of the circle)

संलग्न आकृति में प्लास्टिक की एक वृत्ताकार चूड़ी दिखाई गई है । समझो कि यह चूड़ी A तथा B बिंदुओं पर टूट गई है। तो चित्र में चूड़ी को वृत्त के संदर्भ में क्या कहेंगे ?

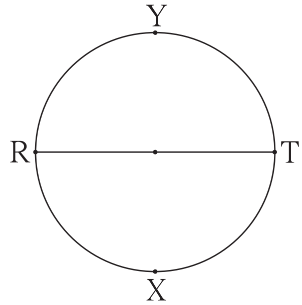
आओ, समझें

संलग्न आकृति में जीवा AB के कारण वृत्त के दो भाग हुए हैं। उनमें से (वृत्तखंड) चाप AXB छोटा है। उसे **लघु (वृत्तखंड) चाप** कहते हैं। (वृत्तखंड) चाप AYB **बड़ा चाप** (वृत्तखंड) है। उसे **दीर्घ चाप (वृत्तखंड)** कहते हैं।



जिन दो चापों के अंतबिंदु सामान्य होते हैं तथा उन वृत्तखंडों के मिलने से पूर्ण वृत्त बनता है, वे वृत्तखंड चाप परस्पर संगत चाप होते हैं। यहाँ पर चाप AYB तथा चाप AXB परस्पर संगत चाप हैं।

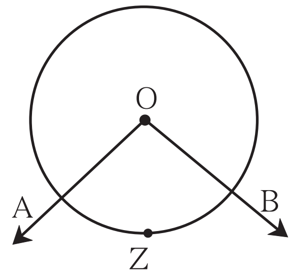
संलग्न आकृति में जीवा RT वृत्त का व्यास है। व्यास के कारण वृत्त के दो समान भाग बनते हैं। उन्हें **अर्धवृत्त** कहते हैं, यह ध्यान में रखो ।



केंद्रीय कोण और चाप का माप (Central angle and Measure of an arc)

संलग्न आकृति में बिंदु 'O' वृत्त का केंद्रबिंदु है। बिंदु O ही $\angle AOB$ का शीर्षबिंदु है। जिस कोण का शीर्षबिंदु वृत्त का केंद्रबिंदु हो उस कोण को **केंद्रीय कोण** कहते है।

आकृति में $\angle AOB$ यह चाप AZB से संबंधित केंद्रीय कोण है। **चाप द्वारा बने केंद्रीय कोण का माप उस चाप के माप के बराबर होता है।**



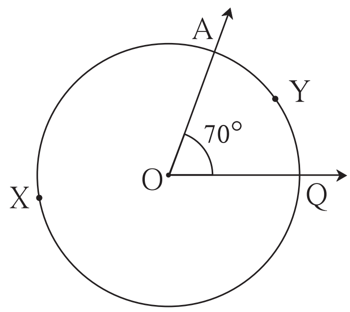
✸ **लघुचाप का माप**

लघुचाप के संगत कोण का माप ही लघुचाप का माप होता हैं। ऐसा माना जाता है।

संलग्न आकृति में केंद्रीय कोण $\angle AOQ$ का माप 70° है।

$\therefore$ लघुचाप AYQ का माप 70° है।

$\therefore$ m(चाप AYQ) $= 70^\circ$

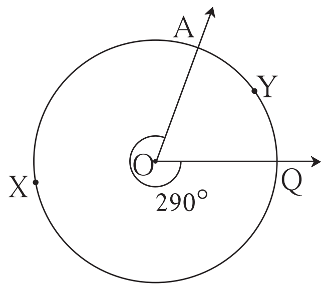


✸ **दीर्घ चाप का माप**

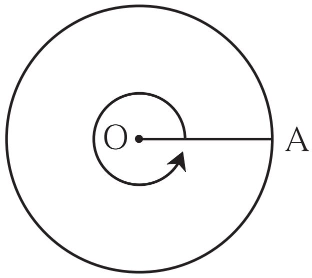
दीर्घ चाप का माप $= 360^\circ -$ संगत लघुचाप का माप

$\therefore$ आकृति में दीर्घचाप AXQ का माप $360^\circ - 70^\circ$

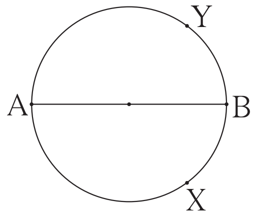
$= 290^\circ$ है ।



✸ वृत्त का चाप (Measure of circle)



संलग्न आकृति में दर्शाए अनुसार OA वृत्त की त्रिज्या हैं। OA यह त्रिज्या घड़ी की सुइयों की विपरीत दिशा में पूर्ण कोण में घूमती है। उस समय बनने वाला कोण 360° माप का हैं। उसका A यह नोक एक पूर्ण वृत्त बनाता है।
$\therefore$ पूर्ण वृत्त का माप 360° होता है।



✸ अर्ध वृत्त का माप

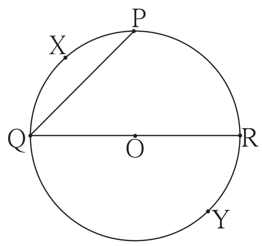
आकृति के आधार पर अर्धवृत्त चाप AXB तथा अर्धवृत्त चाप AYB का माप निश्चित करो।

यह मैंने समझा

- लघुचाप का माप उससे संबंधित केंद्रीय कोण के माप के समान होता है।
- दीर्घचाप का माप = 360° – संगत लघुचाप का माप
- अर्ध वृत्त का माप 180° होता है।

प्रश्नसंग्रह 43

1. सही विकल्प चुनो।
   यदि चाप AXB तथा चाप AYB परस्पर संगत चाप हो और m(चाप AXB) = 120° तो m(चाप AYB) = ?
   (i) 140° (ii) 60° (iii) 240° (iv) 160°



2. संलग्न आकृति के 'O' केंद्रवाले वृत्त में वृत्त के कुछ वृत्तखंड दिखाए गए हैं। उनमें से वृत्त के लघुचाप, दीर्घचाप तथा अर्धवृत्त के नाम लिखो।

3. संलग्न आकृति के O केंद्रवाले वृत्त में लघुचाप PXQ का माप 110° हैं, तो दीर्घ चाप PYQ का माप ज्ञात करो।

ICT Tools or Links

Geogebra Software का उपयोग करते हुए केंद्रीय कोण और चाप के विविध मापों का सहसंबंध move option का उपयोग करके देखो।

12

परिमिति और क्षेत्रफल

आओ, थोड़ा याद करें

परिमिति (Perimeter)

किसी बंद आकृति की सभी भुजाओं की लंबाईयों का योगफल ही उस आकृति की परिमिति होती है।

बहुभुज की परिमिति = उसकी सभी भुजाओं की लंबाईयों का योगफल

$\therefore$ वर्ग की परिमिति = 4 × भुजा

a भुजावाले वर्ग की परिमिति = $4a$

आयत की परिमिति = 2 लंबाई + 2 चौड़ाई

l लंबाई तथा b चौड़ाईवाले आयत की परिमिति = $2l + 2b$

उदा. किसी आयत की परिमिति 64 सेमी हैं, तथा लंबाई 17 सेमी हो तो उसकी चौड़ाई कितनी होगी ?

हल : मानो आयत की चौड़ाई x सेमी

2 लंबाई + 2 चौड़ाई = परिमिति

2 (लंबाई + चौड़ाई) = 64

$2\ (17 + x) = 64$

$$\frac{2(17+x)}{2} = \frac{64}{2}$$

$17 + x = 32$

$x = 15$

आयत की चौड़ाई 15 सेमी है।

उदा. 28 सेमी लंबाई तथा 20 सेमी चौड़ाईवाले किसी आयत की परिमिति एक वर्ग के परिमिति के समान है। तो वर्ग की भुजा की लंबाई ज्ञात करो।

हल : आयत की परिमिति = 2 (लंबाई + चौड़ाई)

= 2 (28 + 20)

= 96

वर्ग की भुजा a हो तो $4a = 96$

वर्ग की परिमिति = 96

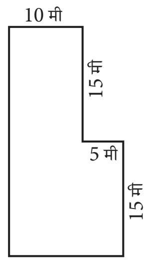
$4a = 96$

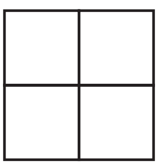
$$\therefore\ a = \frac{96}{4} = 24$$

वर्ग के भुजा की लंबाई 24 सेमी है।

प्रश्नसंग्रह 44

1. किसी आयत की लंबाई तथा चौड़ाई को दुगुनी करने पर उस आयत की परिमिति मूल आयत की परिमिति के कितनी गुनी होगी ?
2. किसी वर्ग की भुजा की लंबाई तीगुनी करने पर उसकी परिमिति मूल वर्ग के परिमिति के कितनी गुना होगी ?
3. संलग्न आकृति में मैदान की लंबाई तथा चौड़ाई के माप दिए गए है। तो मैदान की परिमिति ज्ञात करो।





4. एक मीटर लंबाई वाले वर्गाकार कपड़े का टुकड़ा लेकर आकृति में दर्शाए अनुसार चार समान आकार के रूमाल बनाए गए तो सभी रूमालों के किनारों पर लेस लगाने के लिए कितनी लंबी लेस लगेगी ?

आओ, थोड़ा याद करें

क्षेत्रफल (Area)

- वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा $\times$ भुजा = (भुजा)^2
- आयत का क्षेत्रफल = लंबाई $\times$ चौड़ाई = $l \times b$

क्षेत्रफल यह वर्ग मी, वर्ग सेमी, वर्ग किमी आदि इकाइयों में मापा जाता है।

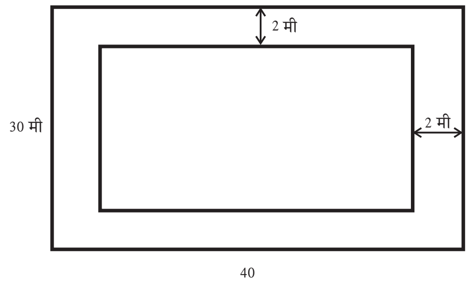
कृति I

खो-खो, कबड्डी इन खेलों के लिए बनाए गए मैदानों (कोर्ट) में संभव हो तो टेनिस कोर्ट, बैडमिंटन कोर्ट की लंबाई तथा चौड़ाई नापो और उनकी परिमिति तथा क्षेत्रफल ज्ञात करो।

कृति II

अनिरुद्ध को उसके घर की किसी दीवार पर नया रंग लगाना है। दीवार की लंबाई 7 मीटर तथा ऊँचाई 5 मीटर है। रंग लगाने वाले (पेंटर) ने रंग लगाने की दर 120 रुपये प्रति वर्ग मीटर बताई तो पेंटर को कितने रुपये देने होंगे ? निश्चित करो।

उदा. किसी आयताकार बगीचे की लंबाई 40 मीटर तथा चौड़ाई 30 मी है। बगीचे के अंदर उसकी सीमाओं से सटा हुआ चारों ओर 2 मीटर चौड़ा रास्ता है। रास्ते पर 25 सेमी $\times$ 20 सेमी आकार की फर्शियाँ (टाईल्स) लगानी हों तो कितनी फर्शियाँ लानी होंगी ?



100 सेमी = 1 मी

25 सेमी = $\frac{25}{100}$ मी

फर्श लगने वाले भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करेंगे।

बगीचे का क्षेत्रफल = 40 $\times$ 30 = 1200 वर्ग मी

रास्ता छोड़कर बगीचे का क्षेत्रफल = 36 $\times$ 26 = 936 वर्ग मी.

$\therefore$ फर्शियाँ लगने वाली जगह का क्षेत्रफल = 1200 − 936 = 264 वर्ग मीटर

प्रत्येक फर्श का क्षेत्रफल = $\frac{25}{100} \times \frac{20}{100} = \frac{1}{20}$ वर्ग मी.

एक फर्श का क्षेत्रफल $\frac{1}{20}$ वर्ग मी. है तो 264 वर्ग मी स्थान पर लगने वाली फर्शियों की संख्या ज्ञात करेंगे।

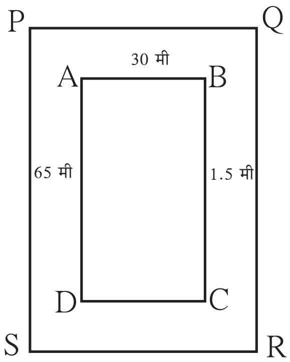
$$\text{फर्शियों की संख्या} = \frac{\text{जगह का क्षेत्रफल}}{\text{एक फर्श का क्षेत्रफल}}$$

$$= 264 \div \frac{1}{20}$$

$$= 264 \times 20 = 5280$$

अर्थात 5280 फर्श (टाइल्स) लानी होंगी।

उदा. किसी आयताकार खेल के मैदान की लंबाई 65 मीटर तथा चौडाई 30 मीटर है। इस मैदान के चारों ओर बाहरी भाग में सटकर 1.5 मीटर चौड़ा एक रास्ता है। उस रास्ते का क्षेत्रफल ज्ञात करो।



हल : खेल के मैदान का आकार आयताकार है।

☐ ABCD खेल का मैदान है। उसके चारों ओर बाहर से 1.5 मीटर चौड़ाई का रास्ता है।

☐ ABCD की सभी भुजाओं से 1.5 मीटर अंतर रखने पर ☐ PQRS , यह आयत मिलता है।

आयत PQRS की लंबाई $= 65 + 1.5 + 1.5 = 68$ मीटर

आयत PQRS की चौड़ाई $= 30 + 1.5 + 1.5 = 33$ मीटर

रास्ते का क्षेत्रफल = आयत PQRS का क्षेत्रफल − आयत ABCD का क्षेत्रफल

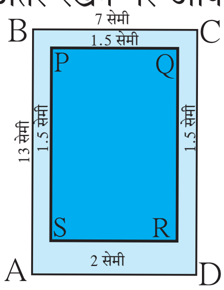
$= 68 \times 33 - 65 \times 30 = \square - \square = \square$ वर्ग मीटर

आओं, चर्चा करें

- उपर्युक्त उदाहरण के रास्ते का क्षेत्रफल अन्य किसी विधि से ज्ञात किया जा सकता है ?

उदा. किसी मोबाइल की लंबाई 13 सेमी तथा चौड़ई 7 सेमी है। उसपर स्क्रीन PQRS को आकृति में दर्शाया गया है। तो उस स्क्रीन का क्षेत्रफल ज्ञात करो।

हल: मानो शीर्षों से बना मोबाइल आयत ABCD है। उसकी लंबाई 13 सेमी तथा चौड़ाई 7 सेमी है। AB, BC तथा DC की ओर 1.5 सेमी दूरी रखने पर और भुजा DA से 2 सेमी अंतर रखने पर आयत PQRS बनता है।



आयत PQRS की लंबाई = $\square$ सेमी

आयत PQRS की चौड़ाई = $\square$ सेमी

स्क्रीन का क्षेत्रफल = आयत PQRS का क्षेत्रफल = ... × .... = $\square$ वर्गसेमी

कृति

विविध आकार के मोबाइल देखो। उनके स्क्रीन का क्षेत्रफल ज्ञात करो।

प्रश्नसंग्रह 45

1. किसी वर्ग की भुजा की लंबाई 12 सेमी हो तो उसका क्षेत्रफल ज्ञात करो।
2. किसी आयत की लंबाई 15 सेमी तथा चौड़ाई 5 सेमी हो तो आयत का क्षेत्रफल ज्ञात करो।
3. किसी आयत का क्षेत्रफल 102 वर्ग सेमी है। आयत की लंबाई 17 सेमी हैं तो आयत की परिमिति कितनी होगी ?

4*. किसी वर्ग की भुजा की लंबाई तीन गुना करने पर, उसका क्षेत्रफल मूल वर्ग के क्षेत्रफल का कितनी गुना होगा ?

आओ, समझें

समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल (Area of right angle triangle)

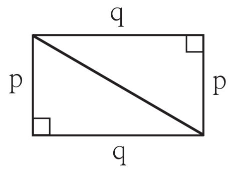
कृति

संलग्न आकृति में दर्शाए अनुसार एक ही माप के दो समकोण त्रिभुज काटकर उन्हें मिलाओ। एक आयत बनता है तुम यह महसूस करोगे। त्रिभुज की समकोण बनाने वाली भुजाओं की लंबाई p तथा q हैं और p तथा q यह आयत की भी भुजाएँ हैं। आकृति के अनुसार हमे यह दिखाई देता है कि,

आयत का क्षेत्रफल = 2 $\times$ समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल

$\therefore$ 2 $\times$ समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल = $p \times q$

$\therefore$ समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\dfrac{p \times q}{2}$



मैंने यह समझा

- समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\dfrac{1}{2}$ $\times$ समकोण बनानेवाली भुजाओं की लंबाई का गुणनफल

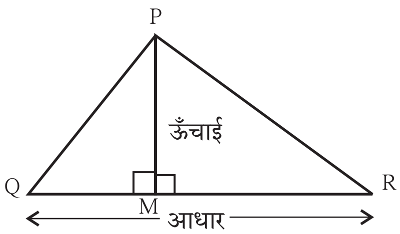
समकोण त्रिभुज में समकोण बनाने वाली दो भुजाओं में से एक भुजा को आधार मानें तो दूसरी भुजा ऊँचाई होती है।

इस प्रकार समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\dfrac{1}{2}$ $\times$ आधार $\times$ ऊँचाई

किसी प्रकार का एक त्रिभुज ΔABC हो तो आधार के लिए एक भुजा लेते हैं, उस भुजा के सम्मुख शीर्षबिंदु से आधार पर खींचा गया लंब का माप ही उस त्रिभुज की ऊँचाई होती है।

ΔPQR (किसी भी प्रकार का त्रिभुज) लेकर आधार QR लो। P से रेखा QR पर PM लंब खींचो।

आकृति 1: बिंदु M रेख QR पर स्थित है।



ΔPMR तथा ΔPMQ समकोण त्रिभुज हैं।

$A(\Delta PQR) = A(\Delta PMQ) + A(\Delta PMR)$

$= \dfrac{1}{2} \times l(QM) \times l(PM) + \dfrac{1}{2} \times l(MR) \times l(PM)$

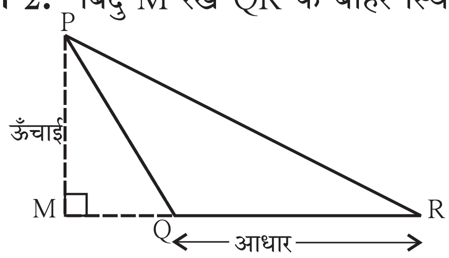
$= \dfrac{1}{2} [l(QM) + l(MR)] \times l(PM)$

$= \dfrac{1}{2} l(QR) \times l(PM)$

$= \dfrac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊँचाई

$A(\Delta PQR) = \dfrac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊँचाई

आकृति 2: बिंदु M रेख QR के बाहर स्थित है।



ΔPMR तथा ΔPMQ समकोण त्रिभुज हैं।

$A(\Delta PQR) = A(\Delta PMR) - A(\Delta PMQ)$

$= \dfrac{1}{2} \times l(MR) \times l(PM) - \dfrac{1}{2} \times l(MQ) \times l(PM)$

$= \dfrac{1}{2} [l(MR) - l(MQ)] \times l(PM)$

$= \dfrac{1}{2} \times l(QR) \times l(PM)$

$= \dfrac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊँचाई

$A(\Delta PQR) = \dfrac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊँचाई

मैंने यह समझा

$$\text{त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{ऊँचाई}$$

उदा. किसी समकोण त्रिभुज की समकोण बनाने वाली भुजाओं की लंबाई 3.5 सेमी तथा 4.2 सेमी हो, तो उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करो।

हल: समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ समकोण बनाने वाली भुजाओं का गुणनफल

$= \frac{1}{2} \times 3.5 \times 4.2$

$= 7.35$ वर्ग सेमी

उदा. किसी त्रिभुज का आधार 5.6 सेमी तथा ऊँचाई 4.5 सेमी हो तो उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करो।

हल: त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊँचाई

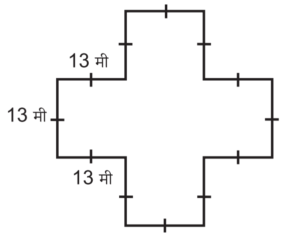
$= \frac{1}{2} \times 5.6 \times 4.5$

$= 12.6$ सेमी^{2}

(वर्ग सेमी को सेमी^{2} भी लिखते है।)

प्रश्नसंग्रह 46

1. किसी दिनदर्शिका के पृष्ठ की लंबाई 45 सेमी तथा चौड़ाई 26 सेमी है तो उस पृष्ठ का क्षेत्रफल कितना होंगा ?
2. किसी त्रिभुज की ऊँचाई 3.6 सेमी तथा आधार 4.8 सेमी है तो उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करो ?
3. किसी आयताकार भूखंड की लंबाई 75.5 मीटर और चौड़ाई 30.5 मीटर हैं तो 1000 रु प्रति वर्ग मीटर की दर से उस भूखंड का मूल्य कितना होगा ?
4. किसी आयताकार सभागृह की लंबाई 12 मीटर तथा चौड़ाई 6 मीटर है उस सभागृह में 30 सेमी भुजावाली वर्गाकार फर्शियाँ लगानी हैं तो उस सभागृह में कुल कितनी फर्शियाँ लगेंगी ? यदि 15 सेमी भुजावाली वर्गाकार फर्शियाँ लें तो कुल कितनी फर्शियाँ लगेंगी ? ज्ञात करो।
5. संलग्न आकृति में दर्शाए गए माप के अनुसार बगीचे की परिमिति तथा क्षेत्रफल ज्ञात करो।

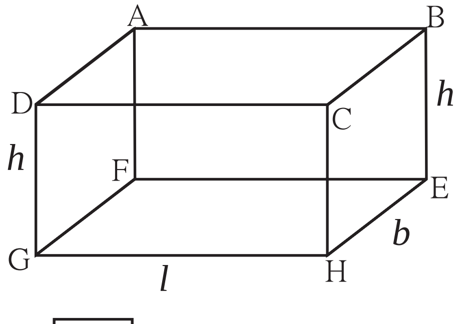


पृष्ठफल (Surface area)

आओ, समझें

किसी भी त्रिविम आकारवाली वस्तु के सभी पृष्ठभागों के क्षेत्रफल का योगफल ही उस वस्तु का पृष्ठफल होता है।

घनाभ का पृष्ठफल



- घनाभ के कुल छह पृष्ठ होते हैं।
- प्रत्येक पृष्ठ आयताकार होता है।
- सम्मुख पृष्ठों का क्षेत्रफल समान होता है।
- प्रत्येक कोर उसे जोड़ने वाली अन्य दो कोरों पर लंब होती है।
- घनाभ के क्षैतिज पृष्ठभाग की लंबाई l से और चौड़ाई b से दिखाते हैं। खड़े (उर्ध्वाधर) पृष्ठ की ऊँचाई h से दिखाते हैं।

आयत ABCD का क्षेत्रफल = आयत GHEF का क्षेत्रफल = लंबाई $\times$ चौड़ाई = $l \times b$

आयत ADGF का क्षेत्रफल = आयत BCHE का क्षेत्रफल = चौड़ाई $\times$ ऊँचाई = $b \times h$

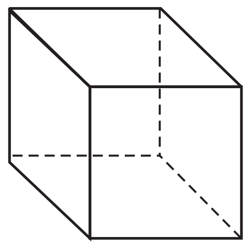
आयत CHGD का क्षेत्रफल = आयत ABEF का क्षेत्रफल = लंबाई $\times$ ऊँचाई = $l \times h$

घनाभ का संपूर्ण पृष्ठफल = सभी आयतों के क्षेत्रफलों का योगफल

घनाभ का संपूर्ण पृष्ठफल = 2 (लंबाई $\times$ चौड़ाई + चौड़ाई $\times$ ऊँचाई + लंबाई $\times$ ऊँचाई)

$= 2\ (l \times b + b \times h + l \times h) = 2\ (lb + bh + lh)$

✸ समघन का पृष्ठफल



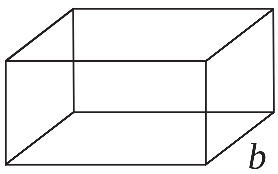
- प्रत्येक समघन के छह पृष्ठ होते हैं।
- प्रत्येक पृष्ठ वर्गाकार होता है।
- सभी पृष्ठों के क्षेत्रफल समान होते हैं।
- वर्ग की भुजा l मानेंगे।
- समघन के एक पृष्ठ का क्षेत्रफल = वर्ग का क्षेत्रफल
- समघन का संपूर्ण पृष्ठफल = 6 वर्गों का क्षेत्रफल

  = 6 $\times$ भुजा^{2}

  $= 6 \times l^2$

उदा. 1.5 मी लंबी, 1.2 मी चौड़ी तथा 1.3 मी ऊँची लोहे की चद्दर वाली घनाभ आकार की पेटी (संदूक) बनाने के लिए कितनी लोहे की चद्दरें लगेंगी ?

हल : पेटी की लंबाई = l = 1.5 मीटर, चौड़ाई = b = 1.2 मीटर, ऊँचाई = h = 1.3 मीटर



पेटी का पृष्ठफल $= 2\ (l \times b + b \times h + l \times h)$

$= 2\ (1.5 \times 1.2 + 1.2 \times 1.3 + 1.5 \times 1.3)$

$= 2\ (1.80 + 1.56 + 1.95)$

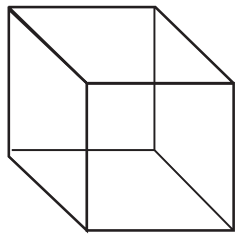
$= 2\ (5.31)$

= 10.62 वमी.

पेटी बनाने के लिए 10.62 वर्ग मी लोहे की चद्दर लगेगी।

उदा. किसी समघनाकार डिब्बे की भुजा की लंबाई 0.4 मी है। 50 रु प्रति वर्ग मीटर की दर से उस डिब्बे के केवल बाहरी पृष्ठों पर रंग लगवाने का खर्च कितना होगा ?

हल : भुजा = l = 0.4 मीटर



समघन का संपूर्ण पृष्ठफल $= 6 \times (l)^2$

$= 6 \times (0.4)^2$

$= 6 \times 0.16 = 0.96$ वर्ग मी

1 वर्ग मी रंग लगाने का खर्च 50 रुपये

$\therefore$ 0.96 वर्ग मी रंग लगाने का खर्च $= 0.96 \times 50$

= 48 रुपये

डिब्बा रंगने का खर्च 48 रुपये होगा।

प्रश्नसंग्रह 47

1. समघन की भुजा की लंबाई नीचे दी गई है। उनका पृष्ठफल ज्ञात करो।

   (i) 3 सेमी (ii) 5 सेमी (iii) 7.2 मी (iv) 6.8 मी (v) 5.5 मी

2. घनाभ की लंबाई, चौड़ाई, तथा ऊँचाई क्रमशः नीचे दी गई है, उनका संपूर्ण पृष्ठफल ज्ञात करो।

   (i) 12 सेमी, 10 सेमी, 5 सेमी. (ii) 5 सेमी, 3.5 सेमी, 1.4 सेमी.

   (iii) 2.5 सेमी, 2 मी, 2.4 मी. (iv) 8 मी, 5 मी, 3.5 मी.

3. किसी माचिस पेटी की लंबाई 4 सेमी, चौड़ाई 2.5 सेमी तथा ऊँचाई 1.5 सेमी है। उस माचिस पेटी के बाहरी सतह पर रंगीन कागज चिपकाना है तो कितना कागज लगेगा ?

4. किसी बगीचे की साग-भाजी को ट्राली से ले जाने के लिए 1.5 मीटर लंबी, 1 मीटर चौड़ी तथा 1 मीटर ऊँची बिना ढ़क्कन वाली लोहे के चद्दर (पतरा) की पेटी तयार करनी है। उसके लिए कितने पृष्ठों का पतरा लगेगा ? उस पेटी को बाहर तथा अंदर से जंगरोधी रंग से रँगवाना हैंतो 150 प्रति वर्गमीटर की दर से पेटी रँगने का खर्च कितना होगा ?

गणितीय मनोरंजन

कुछ तीन अंकों की संख्या ऐसी हैं कि उनके अंकों के गुणनफल से उस संख्या में पूरा-पूरा भाग जाता है।

उदा. (i) 175 यह संख्या लो, $1 \times 7 \times 5 = 35$, $\frac{175}{35} = 5$

(ii) 816 यह संख्या लो, $8 \times 1 \times 6 = 48$, $\frac{816}{48} = 17$

(iii) 612 यह संख्या लो, $6 \times 1 \times 2 = 12$, $\frac{612}{12} = 51$

इसी तरह की संख्या 135, 312,672 हैं।

इसी प्रकार की और संख्या खोजो।

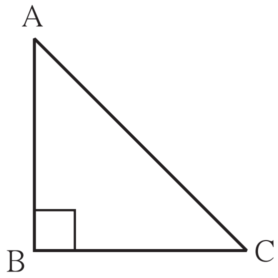
13 पायथागोरस का सिद्धांत (प्रमेय)

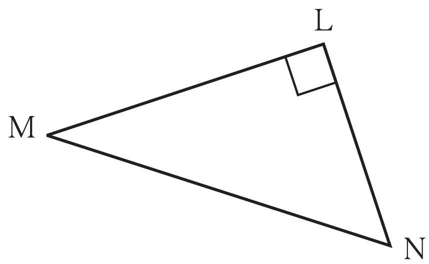
आओ, थोड़ा याद करें

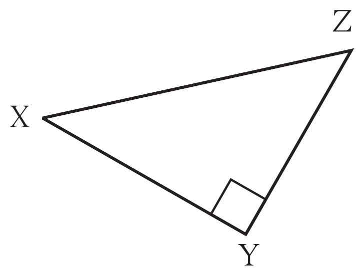
समकोण त्रिभुज (Right angled triangle)

हमे ज्ञात हैं कि, जिस त्रिभुज का एक कोण समकोण हो, उस त्रिभुज को समकोण त्रिभुज कहते हैं और समकोण के सामने की भुजा (सम्मुख) को कर्ण कहते हैं।

- नीचे दिए गए त्रिभुजों के कर्णों के नाम लिखो।







ΔABC का कर्ण ☐ ΔLMN का कर्ण ☐ ΔXYZ का कर्ण ☐

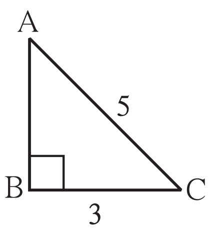
पायथागोरस का सिद्धांत (प्रमेय) (Theorem of Pythagoras)

एक महान यूनानी गणितज्ञ पायथागोरस ईसा पूर्व छठी शताब्दी में हुए थे। गणित विषय में उनका योगदान बहुत बड़ा हैं। गणित सिखाने की उनकी पद्धत लोकप्रिय थी। जिससे उनके कई शिष्य बने।

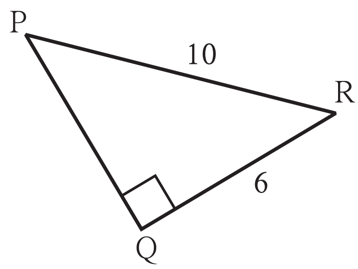
समकोण त्रिभुज संबंधी एक सिद्धांत बहुत पहले से कई देशों के लोगों को ज्ञात था। भारत के 'शुल्वसूत्र' इस ग्रंथ में भी दिया गया हैं। उस सिद्धांत का नियमानुसार विन्यास करके उसकी तार्किक उत्पत्ति पायथागोरस ने सबसे पहले की इसीलिए इस सिद्धांत (प्रमेय) को उनका नाम दिया गया। **समकोण त्रिभुज में कर्ण का वर्ग अन्य दो भुजाओं के वर्गों के योगफल के बराबर होता है।** यही पायथागोरस का सिद्धांत हैं।

कृति नीचे कर्ण तथा समकोण बनानेवाली एक भुजा देने पर समकोण त्रिभुज की रचना करके तीसरी भुजा नापकर लिखो। पायथागोरस के नियम की जाँच करो।

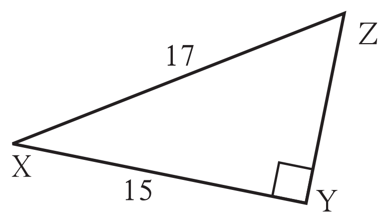
(i)



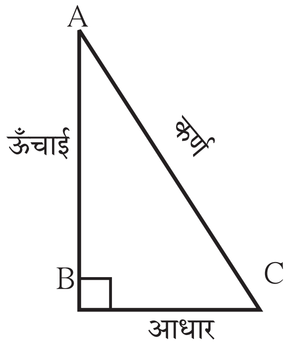
(ii)



(iii)



आओ, समझें

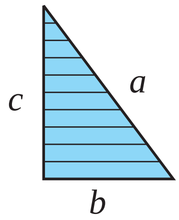


संलग्न आकृति के आधार पर पायथागोरस का नियम निम्नलिखित प्रकार से लिखा जाता है। ΔABC में $\angle B$ समकोण है।

$[l(AC)]^2 = [l(BC)]^2 + [l(AB)]^2$

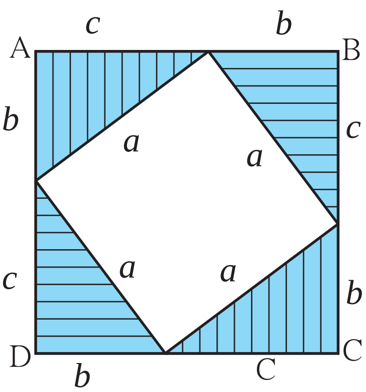
सामान्यतः किसी समकोण त्रिभुज में समकोण बनाने वाली भुजाओं में से एक भुजा आधार तथा दूसरी भुजा ऊँचाई लेते हैं। तब इस नियम को **(कर्ण)^2 = (आधार)^2 + (ऊँचाई)^2** इस प्रकार लिखते हैं।

पायथागोरस के **नियम की जाँच करने हेतु** निम्नलिखित कृति करो।

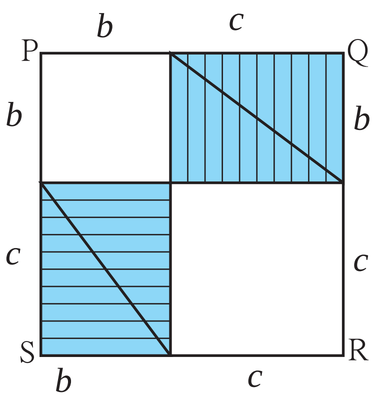


कृति एक कार्ड पेपर से समान मापवाले 8 समकोण त्रिभुज काटो। उनकी भुजा की लंबाई कोई भी हो सकती है। मानो उस त्रिभुज का कर्ण 'a' इकाई, समकोण बनाने वाली भुजाएँ 'b' इकाई तथा 'c' इकाई हैं। यह ध्यान रखे की उस त्रिभुज का क्षेत्रफल $\left(\frac{bc}{2}\right)$ हो।

अब दूसरे कार्ड पेपर पर (b + c) इकाई भुजावाले दो वर्ग पेंसिल से बनाओ। आकृति में दर्शाए अनुसार काटे गए 8 त्रिभुजों में से 4 त्रिभुज को वर्ग ABCD में रखो। तथा शेष 4 त्रिभुज आकृति में दर्शाए अनुसार वर्ग PQRS में रखो। त्रिभुजों से ढँका हुआ भाग रेखांकित करो।



आकृति (i)



आकृति (ii)

आकृतियों का निरीक्षण करो। आकृति (i) में रिक्त स्थान की भुजा 'a' है, ऐसे वर्ग की रचना करो। आकृति (ii) में रिक्त स्थान 'b' तथा 'c' भुजा वाले वर्गों की रचना करो। दोनों वर्गों में रेखांकित किया गया भाग समान अर्थात चार समकोण त्रिभुजों के क्षेत्रफल के बराबर होता है।

आकृति (i) में वर्ग A B C D का क्षेत्रफल = $a^2 + 4 \times$ समकोण त्रिभुजों का क्षेत्रफल

$$= a^2 + 4 \times \frac{1}{2}\ bc$$

$$= a^2 + 2bc$$

$$\text{आकृति (ii) में वर्ग PQRS का क्षेत्रफल} = b^2 + c^2 + 4 \times \text{समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल}$$

$$= b^2 + c^2 + 4 \times \frac{1}{2} bc$$

$$= b^2 + c^2 + 2bc$$

$$\text{वर्ग ABCD का क्षेत्रफल} = \text{वर्ग PQRS का क्षेत्रफल}$$

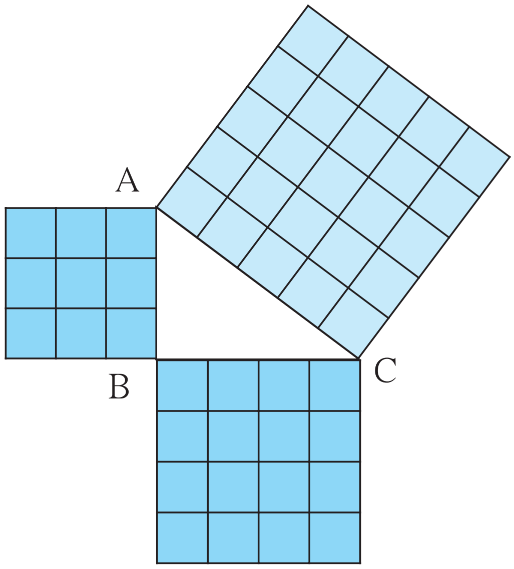
$$\therefore \quad a^2 + 2bc = b^2 + c^2 + 2bc$$

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2$$

आओ, चर्चा करें

- बिना कोणमापक (चाँदे) की सहायता से देखो कि आकृति (i) में रिक्त वर्ग का प्रत्येक कोण समकोण है।

कृति एक कार्ड पेपर पर 3 सेमी, 4 सेमी तथा 5 सेमी माप के समकोण त्रिभुज की रचना करो। प्रत्येक भुजा पर वर्ग की रचना करो। प्रत्येक वर्ग का क्षेत्रफल ज्ञात करके, पायथागोरस के नियम को जाँचो।



पायथागोरस के नियमानुसार समकोण त्रिभुज की दो भुजाए ज्ञात होने पर तीसरी भुजा ज्ञात कर सकते हैं।

उदा. ΔABC में $\angle C = 90°$, $l(AC) = 5$ सेमी तथा $l(BC) = 12$ सेमी, तो $l(AB) = ?$

हल : समकोण त्रिभुज ABC में $\angle C = 90°$ $\therefore$ भुजा AB कर्ण है। पायथागोरस के नियमानुसार,

$$l(AB)^2 = l(AC)^2 + l(BC)^2$$

$$= 5^2 + 12^2$$

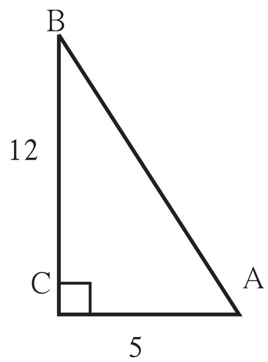
$$= 25 + 144$$

$$\therefore l(AB)^2 = 169$$

$$\therefore l(AB)^2 = 13^2$$

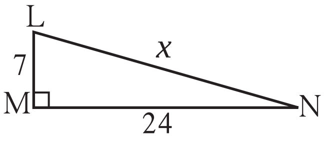
$$\therefore l(AB) = 13$$

$\therefore$ रेख AB की लंबाई = 13 सेमी

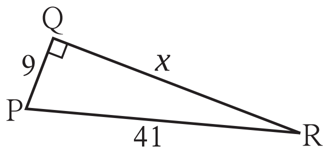


प्रश्नसंग्रह 48

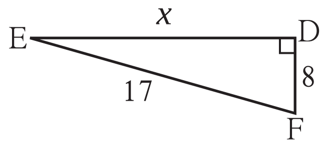
1. नीचे दी गई आकृतियों में 'x' का मान ज्ञात करो।



(i)



(ii)



(iii)

2. समकोण त्रिभुज ΔPQR में $\angle P = 90^\circ$ यदि $l(PQ) = 24$ सेमी तथा $l(PR) = 10$ सेमी है, तो रेखाखंड QR की लंबाई ज्ञात करो।
3. समकोण ΔLMN में $\angle M = 90^\circ$ यदि $l(LM) = 12$ सेमी और $l(LN) = 20$ सेमी है, तो रेख MN की लंबाई ज्ञात करो।
4. 15 मी लंबी सीढ़ी जमीन से 9 मीटर ऊँचाई पर स्थित किसी दीवार की खिड़की तक पहुँचती है, तो दीवार तथा सीढ़ी के निचले सिरे के बीच की दूरी ज्ञात करो।

आओ, समझें

प्राकृत संख्याओं के त्रिक में से बड़ी संख्या का वर्ग अन्य दो संख्याओं के वर्गों के योगफल के बराबर होता है। इसे **पायथागोरस का त्रिक** कहते हैं। जिस त्रिभुज के भुजाओं की लंबाई त्रिक की संख्याओं को दर्शाती है तो वह त्रिभुज समकोण त्रिभुज होता है।

नीचे दी गई तीनों संख्याएँ क्या पायथागोरस के त्रिक हैं ?

उदा. 7, 24, 25 प्रत्येक संख्या का वर्ग करेंगे।

$7^2 = 49,\ 24^2 = 576,\ 25^2 = 625$

$\therefore\ 49 + 576 = 625$

$\therefore\ 7^2 + 24^2 = 25^2$

$\therefore$ 7, 24 तथा 25 यह पायथागोरस का त्रिक है।

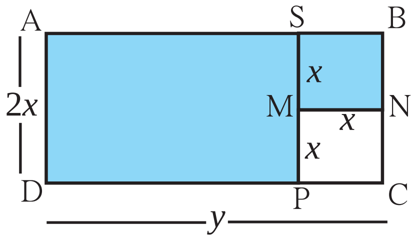
उपक्रम : संख्या तथा समूह 1 से 50 में से पायथागोरस के त्रिक खोजो।

प्रश्नसंग्रह 49

1. नीचे कुछ त्रिक दिए गए हैं। उनमें से पायथागोरस के त्रिक पहचानो।
   (i) 3 सेमी, 4 सेमी, 5 सेमी
   (ii) 2 सेमी, 4 सेमी, 5 सेमी
   (iii) 4 सेमी, 5 सेमी, 6 सेमी
   (iv) 2 सेमी, 6 सेमी, 7 सेमी
   (v) 9 सेमी, 40 सेमी, 41 सेमी
   (vi) 4 सेमी, 7 सेमी, 8 सेमी
2. नीचे कुछ त्रिभुजों की भुजाओं की लंबाई दी गई है। इस जानकारी के आधार पर बताओ कि कौन-से त्रिभुज समकोण त्रिभुज हैं ?
   (i) 8, 15, 17 (ii) 11, 12, 15 (iii) 11, 60, 61 (iv) 1.5, 1.6, 1.7
   (v) 40, 20, 30

14 बैजिक सूत्र – वर्ग विस्तार

आओ, थोड़ा याद करें



संलग्न आकृति में आयत ABCD दर्शाया गया है। इस आयत की लंबाई Y इकाई तथा चौड़ाई (2x)इकाई हैं। इस आयताकृति भाग से x इकाई भुजावाला वर्ग काटकर अलग किया गया हैं। छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए बैजिक व्यंजकों पर संक्रियाएँ करनी होगी।

आयत ABCD के क्षेत्रफल को A($\square$ABCD) इस प्रकार लिखो।

रंगीन भाग का क्षेत्रफल = A($\square$ABCD) – A($\square$MNCP) = $2xy - x^2$

रंगीन भाग का क्षेत्रफल = A($\square$ASPD) + A($\square$SBNM) = $(y - x) \times 2xy + x^2$

$= 2xy - 2x^2 + x^2$

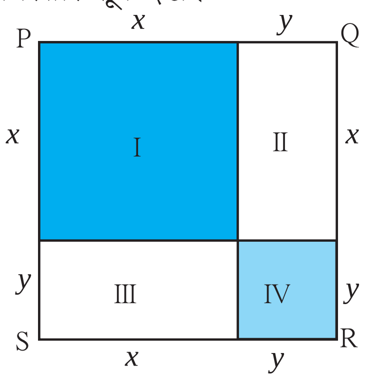
$= 2xy - x^2$

आओ, समझें

वर्गविस्तार

बैजिक व्यंजकों के गुणनफल का गुणा करने पर प्राप्त व्यंजक ही गुणाकार का विस्तार है। विशिष्ट स्वरूप वाले कुछ बैजिक व्यंजकों को एक साथ लिख पाने की सुविधा के लिए सूत्र तैयार किए जाते हैं। आओ, हम ऐसे कुछ विस्तार सूत्र देखें।

कृति I



- संलग्न आकृति में बना चतुर्भुज $\square$PQRS एक वर्ग है। उसकी भुजाओं की लंबाई $(x + y)$ है।

  $\therefore$ A ($\square$PQRS) = $(x + y)^2$

वर्ग PQRS को I, II, III, IV इन आयतों में विभाजित किया गया है।

वर्ग PQRS का क्षेत्रफल I, II, III, IV के क्षेत्रफलों के योगफल के बराबर है।

$\therefore$ A ($\square$PQRS) = A (आयत I) + A (आयत II) + A (आयत III) + A (आयत IV)

$(x + y)^2 = x^2 + xy + xy + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$\therefore \quad (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

अब $(x + y)^2$ इस बैजिक व्यंजक का गुणनफल ज्ञात करते हैं।

$(x + y)\,(x + y) = x\,(x + y) + y\,(x + y)$

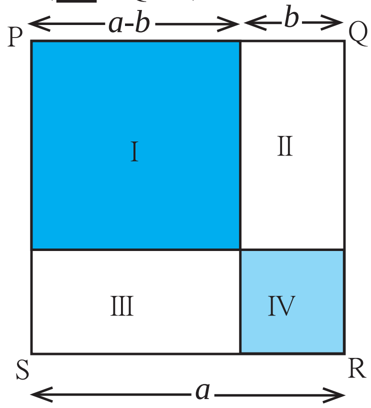
$= x^2 + xy + yx + y^2 \quad \therefore \quad (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$(x + y)$ इस द्विपद का वर्ग करने पर मिलने वाला बैजिक व्यंजक, क्षेत्रफल मापन से मिलने वाले बैजिक व्यंजक के समान है। $\therefore$ $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ यह द्विपद के वर्ग विस्तार का सूत्र हैं।

कृति II संलग्न आकृति में चतुर्भुज PQRS एक वर्ग है। उसकी भुजा की लंबाई a है। वर्ग को 4 आयतों में विभाजित किया गया है।

जैसे $(a - b)$ भुजा वाला वर्ग, b भुजा वाला वर्ग तथा $(a - b)$ और b भुजा वाले 2 आयत।

A (वर्ग I) + A (आयत II) + A (आयत III) + A (वर्ग IV) = A ($\square$PQRS)



$(a - b)^2 + (a - b)\,b + (a - b)\,b + b^2 = a^2$

$(a - b)^2 + 2ab - 2b^2 + b^2 = a^2$

$(a - b)^2 + 2ab - b^2 = a^2$

$\therefore\ (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

बैजिक व्यंजकों का गुणनफल ज्ञात कर सूत्र तैयार करेंगे।

$(a - b)^2 = (a - b) \times (a - b)$

$= a\,(a - b) - b\,(a - b)$

$= a^2 - ab - ab + b^2$

$= a^2 - 2ab + b^2$

मैंने यह समझा

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

वर्गविस्तार सूत्रों में a तथा b के स्थान पर कोई भी संख्या लेकर उसकी जाँच कर सकते हैं।

यदि $a = 5,\ b = 3$

$(a + b)^2 = (5 + 3)^2 = 8^2 = 64$

$a^2 + 2ab + b^2 = 5^2 + 2 \times 5 \times 3 + 3^2$

$= 25 + 30 + 9 = 64$

$(a - b)^2 = (5 - 3)^2 = 2^2 = 4$

$a^2 - 2ab + b^2 = 5^2 - 2 \times 5 \times 3 + 3^2$

$= 25 - 30 + 9 = 4$

निम्नलिखित मान रखकर वर्गविस्तार सूत्र की जाँच करो।

(i) $a = -7\ ,\ b = 8$ (ii) $a = 11\ ,\ b = 3$ (iii) $a = 2.5\ ,\ b = 1.2$

विस्तार करो।

उदा. $(2x + 3y)^2$

$= (2x)^2 + 2(2x) \times (3y) + (3y)^2$

$= 4x^2 + 12xy + 9y^2$

उदा. $(5x - 4)^2$

$= (5x)^2 - 2(5x) \times (4) + 4^2$

$= 25x^2 - 40x + 16$

उदा. $(51)^2$

$= (50 + 1)^2$

$= 50^2 + 2 \times 50 \times 1 + 1 \times 1$

$= 2500 + 100 + 1$

$= 2601$

उदा. $(98)^2$

$= (100 - 2)^2$

$= 100^2 - 2 \times 100 \times 2 + 2^2$

$= 10000 - 400 + 4$

$= 9604$

प्रश्नसंग्रह 50

1. विस्तार करो।

   (i) $(5a + 6b)^2$ (ii) $\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{3}\right)^2$ (iii) $(2p - 3q)^2$ (iv) $\left(x-\frac{2}{x}\right)^2$

   (v) $(ax + by)^2$ (vi) $(7m - 4)^2$ (vii) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$ (viii) $\left(a-\frac{1}{a}\right)^2$

2. $(8 - \frac{1}{x})$ इस द्विपद का वर्ग निम्नलिखित में से कौन-सा हैं ? योग्य पर्याय चुनो।

   (i) $64 - \frac{1}{x^2}$ (ii) $64 + \frac{1}{x^2}$ (iii) $64 - \frac{16}{x} + \frac{1}{x^2}$ (iv) $64 + \frac{16}{x} + \frac{1}{x^2}$

3. किस द्विपद व्यंजक का विस्तार करने पर व्यंजक $m^2n^2 + 14mnpq + 49p^2q^2$ मिलेगा ?

   (i) $(m + n)(p + q)$ (ii) $(mn - pq)$ (iii) $(7mn + pq)$ (iv) $(mn + 7pq)$

4. विस्तार सूत्र की सहायता से मान ज्ञात करो।

   (i) $(997)^2$ (ii) $(102)^2$ (iii) $(97)^2$ (iv) $(1005)^2$

आओ, समझें

✼ $(a + b)$ $(a - b)$ का विस्तार

$$
\begin{aligned}
(a + b)(a - b) &= (a + b) \times (a - b)\\
&= a\,(a - b) + b\,(a - b)\\
&= a^2 - ab + ba - b^2\\
&= a^2 - b^2\\
(a + b)(a - b) &= a^2 - b^2
\end{aligned}
$$

मैंने यह समझा

$$\boxed{(a + b)(a - b) = a^2 - b^2}$$

उदा. $(3x + 4y)(3x - 4y) = (3x)^2 - (4y)^2 = 9x^2 - 16y^2$

उदा. $102 \times 98 = (100 + 2)(100 - 2) = (100)^2 - (2)^2 = 10000 - 4 = 9996$

प्रश्नसंग्रह 51

1. विस्तार सूत्र की सहायता से गुणनफल ज्ञात करो।

   (i) $(x + y)(x - y)$ (ii) $(3x - 5)(3x + 5)$

   (iii) $(a + 6)(a - 6)$ (iv) $\left(\frac{x}{5}+6\right)\left(\frac{x}{5}-6\right)$

2. विस्तार सूत्र की सहायता से मान ज्ञात करो।

   (i) 502×498 (ii) 97×103 (iii) 54×46 (iv) 98×102

आओ, समझें

बैजिक व्यंजकों के गुणनखंड

हमने पूर्ण संख्याओं के गुणनखंड ज्ञात करने का अभ्यास किया है। अब बैजिक व्यंजकों के गुणनखंड ज्ञात करने की विधि देखेंगे।

प्रथम एकपदी के गुणनखंड ज्ञात करेंगे।

$15 = 3 \times 5$ अर्थात 3 तथा 5 यह 15 के गुणनखंड हैं।

उसी प्रकार $3x = 3 \times x$ अर्थात $3x$ के गुणनखंड 3 तथा x हैं।

व्यंजक $5t^2$ को देखो। $5t^2 = 5 \times t^2 = 5 \times t \times t$

$1, 5, t, t^2, 5t, 5t^2$ बैजिक व्यंजक $5t^2$ के गुणनखंड हैं।

$6\,ab^2 = 2 \times 3 \times a \times b \times b$

एकपदी के गुणनखंड ज्ञात करते समय हो सके तो पहले गुणांक के गुणनखंड ज्ञात करें। उसके बाद चरांक के गुणनखंड ज्ञात कर सकते हैं।

प्रश्नसंग्रह 52

⊙ नीचे दिए गए व्यंजकों के अभाज्य गुणनखंड ज्ञात कर गुणनफल के रूप में लिखो।

(i) $201\ a^3 b^2$, (ii) $91\ xyt^2$, (iii) $24\ a^2 b^2$, (iv) tr^2s^3

आओ, समझें

द्विपद के गुणनखंड ज्ञात करना।

$4xy + 8xy^2$ इस द्विपद के प्रत्येक पद का सामान्य गुणनखंड $4\ x$ तथा y है।

$\therefore\quad 4xy + 8xy^2 = 4(xy + 2xy^2) = 4x\ (y + 2xy) = 4xy\ (1 + 2y)$

द्विपद के गुणनखंड ज्ञात करने के लिए दोनों पदों के सामान्य घटक को कोष्ठक के बाहर गुणनफल के रूप में लिखो।

$9a^2bc + 12abc^2 = 3(3a^2bc + 4abc^2) = 3abc\ (3a + 4c)$ इस प्रकार गुणनखंड ज्ञात कर सकते हो।

$(a + b)\ (a - b) = a^2 - b^2$ यह सूत्र हमें पता हैं

इस आधार पर, $a^2 - b^2$ के गुणनखंड $(a + b)\ (a - b)$ ज्ञात कर सकते हैं।

गुणनखंड ज्ञात करो।

उदा. $a^2 - 4b^2 = a^2 - (2b)^2$

$= (a + 2b)\ (a - 2b)$

उदा. $3a^2 - 27b^2 = 3(a^2 - 9b^2)$

$= 3(a + 3b)\ (a - 3b)$

प्रश्नसंग्रह 53

⊙ नीचे दिए गए व्यंजकों के गुणनखंड ज्ञात करो।

(i) $p^2 - q^2$ (ii) $4x^2 - 25y^2$ (iii) $y^2 - 4$ (iv) $p^2 - \frac{1}{25}$

(v) $9x^2 - \frac{1}{16}y^2$ (vi) $x^2 - \frac{1}{x^2}$ (vii) $a^2b - ab$ (viii) $4x^2y - 6x^2$

(ix) $\frac{1}{2}y^2 - 8z^2$ (x) $2x^2 - 8y^2$

❑❑❑

15 सांख्यिकी

आओ, समझें

औसत

नीचे दी गई तालिका में अस्मिता को घर से पाठशाला पहुँचने में लगा हुआ समय मिनट में दिया गया है। लगने वाले समय का विवरण सोमवार से शनिवार तक का है।

वार	सोमवार	मंगलवार	बुधवार	गुरुवार	शुक्रवार	शनिवार
मिनट	20	20	22	18	18	20

इस तालिका में दिखाई दे रहा हैं कि उसे कभी 18 मिनट कभी 22 मिनट तो कभी 20 मिनट लगते हैं। पाठशाला के 6 दिनों का विचार करने पर उसे पाठशाला जाने में प्रतीदिन अंदाजन कितने मिनट लगते हैं ?

गणित में इस प्रकार का अंदाज लगाने के लिए औसत ज्ञात करते हैं। यहाँ पर 6 दिनों के मिनटों का योगफल ज्ञात कर उसे 6 से भाग देने पर प्राप्त भागफल की संख्या ही लगभग लगनेवाला समय है। वह इन सभी संख्याओं का औसत है।

$$\text{औसत} = \frac{\text{पाठशाला में 6 दिन जाने में लगनेवाले समय का योगफल}}{\text{कुल दिन}}$$

$$= \frac{20 + 20 + 22 + 18 + 18 + 20}{6} = \frac{118}{6} = 19\frac{2}{3}$$

अस्मिता को पाठशाला जाने में औसतन $19\frac{2}{3}$ मिनट प्रतिदिन लगते हैं।

उदा. किसी विद्यालय द्वारा विद्यार्थियों के घर तथा विद्यालय के बीच की दूरी ज्ञात करने के लिए सर्वेक्षण किया गया उसमें से निम्नलिखित छह विद्यार्थियों के घर से विद्यालय की दूरी दी गई हैं। उन दूरियों का औसत ज्ञात करो।

950 मी, 800 मी, 700 मी, 1.5 किमी, 1 किमी, 750 मी.

हल : विद्यार्थियों के घर से विद्यालय तक की दूरी का औसत ज्ञात करने के लिए सभी दूरियाँ एक ही इकाई में लेनी पड़ती हैं।

1 किमी = 1000 मीटर
1.5 किमी = 1500 मीटर

$$\text{औसत} = \frac{\text{छह विद्यार्थियों के घर से विद्यालय तक की दूरियों का योगफल}}{\text{कुल विद्यार्थी}}$$

$$= \frac{950 + 800 + 700 + 1500 + 1000 + 750}{6} = \frac{5700}{6} = 950 \text{ मी}$$

विद्यार्थियों के घर से विद्यालय तक की दूरी का औसत 950 मीटर है।

आओ चर्चा करें

उदा. ऋतुजा ने सप्ताह के सातों दिन रस्सीकूद इस खेल का अभ्यास किया। उसके द्वारा प्रत्येक दिन एक मिनट में की गई रस्सीकूदों की संख्याएँ नीचे दी गई हैं।

60, 62, 61, 60, 59, 63, 58

$$\text{औसत} = \frac{\text{सात दिन की गई रस्सीकूद का संख्या का योगफल}}{\text{कुल दिन}}$$

$$= \frac{\square + \square + \square + \square + \square + \square + \square}{7} = \frac{\square}{\square}$$

एक मिनट में की गई रस्सीकूद का औसत = 60.42

जिस संख्या की जानकारी चाहिए, उससे संबंधित उदाहरण (नमूने) दी गई सामग्री में मिलते हैं, उन्हें प्राप्तांक कहते हैं।

हमें मालूम हैं कि रस्सीकूद की संख्या प्राकृतिक संख्याओं में गिनते है। किसी भी दिन रस्सीकूद की संख्या भिन्न में नहीं हो सकती किंतु औसत भिन्न में हो सकता है।

मैंने यह समझा

$$\text{औसत} = \frac{\text{दी गई जानकारी के सभी प्राप्तांकों का योगफल}}{\text{कुल प्राप्तांकों की संख्या}}$$

उपक्रम : ✸ कक्षा में विद्यार्थियों के 10-10 का समूह बनाओ प्रत्येक समूह के विद्यार्थियों की ऊँचाई का औसत ज्ञात करो।

✸ कक्षा अध्यापक से उपस्थिति पत्रक (रजिस्टर) लेकर एक सप्ताह की औसत उपस्थिति ज्ञात करो।

प्रश्नसंग्रह 54

1. किसी शहर के एक सप्ताह की बारिश मिमी में दिखाई है। सप्ताह में हुई बारिश का औसत ज्ञात करो।
   9, 11, 8, 20, 10, 16, 12
2. विद्यालय के स्नेहसम्मेलन में स्वयंसिद्धा महिला बचत गट ने खाद्य पदार्थों का स्टॉल लगाया था। प्रतिघंटा हुई बिक्री ₹ 960, ₹ 830, ₹ 945, ₹ 800, ₹ 847, तथा ₹ 970 थी तो प्रतिघंटा औसत बिक्री ज्ञात करो ?
3. विदर्भ में 5 वर्षों में हुई बारिश नीचे दिखाई गई हैं। इस आधार पर 5 वर्षों के बारिश का औसत ज्ञात करो।
   900 मिमी, 650 मिमी, 450 मिमी, 733 मिमी, 400 मिमी
4. किसी किसान ने पशुआहार की बोरियाँ खरीदी। उनके वजन किग्रा में नीचे दिए गए हैं तो बोरियों का औसत वजन ज्ञात करो।
   49.8, 49.7, 49.5, 49.3, 50, 48.9, 49.2, 48.8

आओ, समझें

बारंबारता वितरण सारिणी (Frequency distribution table)

कभी-कभी दी गई जानकारी में कुछ आँकड़े कई बार आते हैं। **कौन-से आँकड़े कितनी बार आए, इस संख्या को दिखाने वाले प्राप्तांक को बारंबारता कहते हैं।** इस प्रकार बारंबारता सारिणी तैयार करते समय सारिणी में आँकड़े, गणन चिह्न (मिलान चिह्न) तथा बारंबारता ये तीन स्तंभ होते हैं।

1. पहले स्तंभ में छोटी संख्या से प्रारंभ कर बड़ी संख्या तक के आँकड़े लिखो।
   उदा. 1, 2, 3, 4, 5, 6 को क्रमशः एक-के नीचे एक लिखो।
2. दी गई संख्याओं की जानकारी को क्रम से पढ़ो। प्रत्येक बार पढ़ी हुई संख्या के लिए तालिका में उस संख्या के पास के स्तंभ में '।' का चिह्न अंकित करो। इस चिह्न को मिलान चिह्न कहते हैं। (गणन चिह्न कहते हैं।)
   उदा. 3 इस संख्या को 3 संख्या के सामने के स्तंभ में। को '।।।' चिह्न अंकित करो। 4 चिह्नों तक '।।।।' लिखने पर पाँचवाँ चिह्न '𝍸' इस प्रकार लगाते हैं। इस कारण गणन चिह्नों को गिनना आसान होता है।
3. प्रत्येक संख्या के सामने के स्तंभ में लगाए गए चिह्नों को गिनो। इसे ही बारंबारता कहते हैं। तीसरे स्तंभ में यह बारंबारता लिखो।
4. अंत में सभी बारंबारताओं का योगफल ज्ञात करो। उसे N अक्षर से दिखाया जाता है। यह योगफल आँकड़े से प्राप्तांक के बराबर होता है।

दी गई जानकारी के आधार पर बारंबारता सारिणी तैयार करना

उदा. किसी कक्षा के कुछ छात्राओं को घर से विद्यालय तक की दूरी किमी में नीचे दी है।
1, 3, 2, 4, 5, 4, 1, 3, 4, 5, 6, 4, 6, 4, 6
इस जानकारी के आधार पर कैसे बनाई जाती है, देखते हैं। बारंबारता सारिणी तैयार करेंगे।

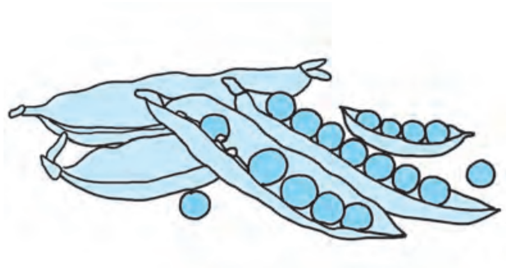
आँकडे	गणन चिह्न	बारंबारता
1	।।	2
2	।	1
3	।।	2
4	𝍸	5
5	।।	2
6	।।।	3
	कुल बारंबारता	N = 15

प्राप्तांक गिनते समय जो संख्या गिनी गई वह ध्यान में रखने के लिए उसपर रेख खींचते हैं। यहाँ पहले तीन आँकड़े गिनने के बाद प्राप्तांकों की सूची प्राप्तांक गिनते समय दी गई है।
(~~1~~, ~~3~~, ~~2~~, 4, 5, 4, 1, 3, 4, 5, 6, 4, 6, 4, 6)

गणित मेरा साथी : घर में, बाजार में

प्रिया की माता जी बाजार से मटर की कुछ फलियाँ लेकर आईं । माता जी ने फलियाँ छीलना प्रारंभ किया। प्रिया निकट ही बैठकर गणित विषय का अभ्यास कर रही थी। सहज ही उसका ध्यान माता जी की छिली हुई फलियों की ओर गया कुछ फलियों में 4 दाने तो कुछ फलियों में 7 दाने निकले। तब प्रिया ने 50 फलियाँ लीं और उनमें से निकले दानों की संख्या दर्ज की।

प्रिया ने मटर की फलियों के दानों की बारंबारता सारिणी तैयार की।



दानों की संख्या	फलियाँ-गणन-चिह्न	बारंबारता
2	卌 |||	8
3	卌 卌 卌	15
4	卌 卌 ||	12
5	||	2
6	卌 ||	7
7	|||	3
8	|||	3
	कुल बारंबारता	N = 50

4, 3, 2, 4, 3, 4, 3, 3, 2, 8
2, 3, 3, 4, 3, 4, 4, 5, 2, 8
8, 2, 5, 3, 4, 4, 3, 6, 2, 3
4, 4, 3, 3, 2, 6, 4, 4, 7, 2
3, 6, 3, 6, 6, 6, 7, 6, 7, 3

माता जी : तुम्हारे द्वारा छीली गई फलियों के दाने का औसत ज्ञात कर सकती हो क्या ?

प्रिया : इन 50 संख्याओं का योगफल करके 50 से भाग देना होगा ना ? झंझट का काम है।

माता जी : हम इस काम को आसान करेंगे। बारंबारता सारिणी में 2 दाने कितनी फलियों में, 3 दाने कितनी फलियों में दिखाए गए है, यह पता है न ?

प्रिया : हाँ। 2 दाने 8 फलियों में, 3 दाने 15 फलियों में 4 दाने 12 फलियों में आदि की जानकारी है, अब आया ध्यान में। 2×8, 3×15, 4×12 इस प्रकार गुणनफल ज्ञात कर उनको जोड़ लेते हैं। प्राप्त योगफल 50 संख्याओं का योगफल होगा।

माता जी : सात छोटा गुणाकार या उनका योगफल करना आसान है न ! बहुत बड़ी सामग्री होने पर बारंबारता का उपयोग होता है।

प्रिया : प्राप्तांकों का कुल योगफल 206 है।

$$\text{औसत} = \frac{206}{50} = 4.12$$

माता जी : किसी भी फली से मिलने वाले दानों की संख्या पूर्ण संख्या होती है किंतु औसत भिन्न में आ सकता है। ऐसा कहा जा सकता है कि यहाँ पर प्रत्येक फली में औसतन 4 दाने हैं।

यह मैंने समझा

- आँकड़ों का वर्गीकरण आसान पद्धति से करने के लिए गणन चिह्नों का उपयोग करते हैं।
- चिह्नों की संख्या बारंबारता दिखाती है। इस प्रकार की सारिणी को बारंबारता सारिणी कहते हैं।
- आँकड़ों की संख्या बड़ी होने पर बारंबारता सारिणी का उपयोग औसत ज्ञात करने के लिए करते हैं।

प्रश्नसंग्रह 55

1. किसी कक्षा के 30 छात्रों की ऊँचाई सेमी में दी गई हैं। इस जानकारी के आधार पर बारंबारता सारिणी तैयार करो।
   131, 135, 140, 138, 132, 133, 135, 133, 134, 135, 132, 133, 140, 139, 132, 131, 134, 133, 140, 140, 139, 136, 137, 136, 139, 137, 133, 134, 131, 140
2. किसी बस्ती में 50 परिवार रहते हैं। प्रत्येक परिवार के सदस्यों (व्यक्तियों) की संख्या नीचे दी गई है। इस जानकारी के आधार पर बारंबारता सारिणी तैयार करो।
   5, 4, 5, 4, 5, 3, 3, 3, 4, 3, 4, 2, 3, 4, 2, 2, 2, 2, 4, 5, 1, 3, 2, 4, 5, 3, 3, 2, 4, 4, 2, 3, 4, 3, 4, 2, 3, 4, 5, 3, 2, 3, 2, 3, 4, 5, 3, 2, 3, 2.
3. एक पाँसा 40 बार उछालने पर ऊपरी पृष्ठभाग पर मिलने वाली संख्या लिखी गई।
   इस जानकारी के आधार पर बारंबारता सारिणी तैयार करो।
   3, 2, 5, 6, 4, 2, 3, 1, 6, 6, 2, 3, 5, 3, 5, 3, 4, 2, 4, 5, 4, 2, 6,
   3, 3, 2, 4, 3, 3, 4, 1, 4, 3, 3, 2, 2, 5, 3, 3, 4,
4. किसी छात्रावास के भोजनालय में 30 छात्रों को भोजन में लगने वाली रोटियों की संख्या नीचे दी गई है। इस जानकारी के आधार पर बारंबारता सारिणी तैयार करो।
   3, 2, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 4, 5, 2, 3, 4, 3, 2, 5, 4, 4, 4, 3, 3, 2, 2, 2, 3, 4, 3, 2, 3, 2

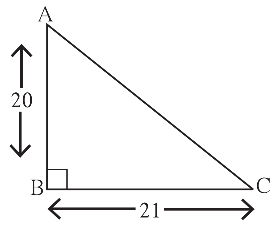
औसत का उपयोग विज्ञान की सभी शाखाओं, वैद्यकीय शाखा, भूगोल, अर्थशास्त्र, समाजशास्त्र आदि विषयों में होता है।

प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 2

1) एंजल ने 9 प्र.श.प्र. की दर से ₹ 15000 कुछ वर्षों के लिए बैंक में जमा किए। अवधि पूर्ण होने पर उसे ₹ 5400 रुपये साधारण ब्याज मिला तो उसने कितने वर्षों के लिए रकम जमा की थी ?
2) किसी रास्ते के डांबरीकरण कार्य के लिए 10 मजदूरों को 4 दिन लगते हैं तो 8 मजदूरों को कितने दिन लगेंगे ?
3) नसरूद्दीन तथा महेश ने क्रमशः ₹ 40,000 तथा ₹ 60,000 निवेश कर एक व्यवसाय प्रारंभ किया। इस व्यवसाय में 30% लाभ हुआ तो प्रत्येक को कितना लाभ हुआ ?
4) किसी वृत्त का व्यास 5.6 सेमी है तो उसकी परिधि ज्ञात करो।
5) विस्तार करो।

   (i) $(2a - 3b)^2$ (ii) $(10 + y)^2$ (iii) $\left(\frac{p}{3}+\frac{q}{4}\right)^2$ (iv) $\left(y-\frac{3}{y}\right)^2$
6) सूत्र की सहायता से गुणनफल ज्ञात करो।

   (i) $(x - 5)(x + 5)$ (ii) $(2a - 13)(2a + 13)$

   (iii) $(4z - 5y)(4z + 5y)$ (iv) $(2t - 5)(2t + 5)$
7) किसी बैलगाड़ी के पहिए की त्रिज्या 1.6 मीटर है। उस पहिए के 2000 फेरों में बैलगाड़ी कितने किलोमीटर दूरी पार करेगी ?
8) 40 मी लंबाईवाले किसी आयताकार बगीचे का क्षेत्रफल 1000 वर्ग मी है तो उस आयत की चौड़ाई तथा परिमिति ज्ञात करो। इस बगीचे के दरवाजे की 4 मी जगह छोड़कर उसके चारों ओर 3 फेरोंवाली बाड़ लगानी है। जिसका खर्च 250 रु प्रतिमीटर है तो बाड़ लगाने का कुल खर्च ज्ञात करो।
9) 

   संलग्न आकृति में दिए गए मापों के आधार पर कर्ण AC की लंबाई ज्ञात करो।

   ΔABC की परिमिति ज्ञात करो।
10) किसी समघन की भुजा की लंबाई 8 सेमी है तो उस समघन का संपूर्ण पृष्ठफल ज्ञात करो।
11) गुणनखंड ज्ञात करो। $365y^4z^3 - 146y^2z^4$

बहुवैकल्पिक प्रश्न

प्रश्न. नीचे दिए गए प्रश्नों में पर्यायी उत्तर दिए हैं। उनमें से उचित विकल्प चुनकर लिखो।

1) संख्या 33, 34, 35, x, 37, 38, 39 का औसत 36 हैं तो x का मान .... होगा।

   (1) 40 (2) 32 (3) 42 (4) 36
2) $(61^2 - 51^2)$ इस वर्ग संख्याओं सें विस्तार सूत्र का उपयोग करके .... यह मान आता है।

   (1) 1120 (2) 1230 (3) 1240 (4) 1250
3) समीर तथा सुनीता ने 2600 रुपये को 8 : 5 के अनुपात में बाँटने पर प्रत्येक के हिस्से में .... तथा .... आएँगे।

   (1) ₹ 1500, ₹ 1100 (2) ₹ 1300, ₹ 900

   (3) ₹ 800, ₹ 500 (4) ₹ 1600, ₹ 1000

प्रश्नसंग्रह 1 **1.** --- **2.** --- **3.** त्रिभुज के अंत:भाग में
4. समकोण त्रिभुज के कर्ण पर
5. त्रिभुज का परिकेंद्र ज्ञात करना

प्रश्नसंग्रह 2 --- प्रश्नसंग्रह 3 ---
प्रश्नसंग्रह 4 --- प्रश्नसंग्रह 5 ---

प्रश्नसंग्रह 6 **1.**(i) रेख MG ≅ रेख GR
(ii) रेख MG ≅ रेख NG (iii) रेख GC ≅ रेख GB
(iv) रेख GE ≅ रेख GR
2. (i) रेख AB ≅ रेख WA (ii) रेख AP ≅ रेख YC
(iii) रेख AC ≅ रेख PY (iv) रेख PW ≅ रेख BY
(v) रेख YA ≅ रेख YQ (vi) रेख BW ≅ रेख ZX
(उपर्युक्त प्रश्नों के लिए सही उत्तर कई आ सकते हैं।)

प्रश्नसंग्रह 7 ⊙ $\angle AOB \cong \angle BOC$
$\angle AOB \cong \angle RST$ $\angle AOC \cong \angle PQR$
$\angle DOC \cong \angle LMN$ $\angle BOC \cong \angle RST$

प्रश्नसंग्रह 8 ⊙(i) 35 (ii) −54 (iii) −36 (iv) −56
(v) 124 (vi) 84 (vii) 441 (viii) −105

प्रश्नसंग्रह 9 **1.** (i) −6 (ii) $\frac{-7}{2}$ (iii) $\frac{-3}{4}$
(iv) $\frac{-2}{3}$ (v) $\frac{-17}{4}$ (vi) 6 (vii) $\frac{5}{3}$ (viii) $\frac{-1}{6}$
(ix) $\frac{6}{5}$ (x) $\frac{1}{63}$ **2.** 24 ÷ 5, 72 ÷ 15,
−48 ÷ (−10) इ.
3. −5 ÷ 7, −15 ÷ 21, 20 ÷ (−28) आदि कई

प्रश्नसंग्रह 10 **1.** 1 **2.** 4,5 और 17,19
3. 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97 कुल 16 अभाज्य संख्याएँ
4. 59 और 61, 71 और 73 **5.** (2,3),(5,7),(11,12), (17,19),(29,30) आदि कई **6.** 2

प्रश्नसंग्रह 11 ⊙(i) 2 × 2 × 2 × 2 × 2
(ii) 3 × 19 (iii) 23 (iv) 2 × 3 × 5 × 5
(v) 2 × 2 × 2 × 3 × 3 × 3
(vi) 2 × 2 × 2 × 2 × 13 (vii) 3 × 3 × 5 × 17
(viii) 2 × 3 × 3 × 19 (ix) 13 × 29 (x) 13 × 43

प्रश्नसंग्रह 12 **1.**(i) 5 (ii) 8 (iii) 5 (iv) 1
(v) 2 (vi) 7 (vii) 3 (viii) 3 (ix) 1 (x) 21
2.(i) मसावि 25, संक्षिप्त रूप $\frac{11}{21}$
(ii) मसावि 19, संक्षिप्त रूप $\frac{4}{7}$
(iii) मसावि 23, संक्षिप्त रूप $\frac{7}{3}$

प्रश्नसंग्रह 13 **1.** (i) 60 (ii) 120 (iii) 288
(iv) 60 (v) 3870 (vi) 90 (vii) 1365 (viii) 180
(ix) 567 (x) 108
2. (i) 1; 1184 (ii) 1; 2346 (iii) 15; 60
(iv) 9; 126 (v) 26; 312

प्रश्नसंग्रह 14 **1.** (i) 30 (ii)40, 20
2. (i) 14; 28 (ii) 16; 32 (iii) 17; 510
(iv) 23; 69 (v) 7; 588
3. (i) 252 (ii) 150 (iii) 1008 (iv) 60 (v)240
4. 365 **5.** (i) $\frac{12}{11}$ (ii) $\frac{17}{19}$ (iii) $\frac{23}{29}$ **6.** 144
7. 255 **8.** 14 **9.** 18 और 20

प्रश्नसंग्रह 15 **1.** अंत:भाग के बिंदु : R,C,N,X
बाह्य भाग के बिंदु : T, U, Q, V, Y
कोणों की भुजाओं पर स्थित बिंदु : A, W, G, B
2. $\angle ANB$ और $\angle BNC$, $\angle BNC$ और $\angle ANC$, $\angle ANC$ और $\angle ANB$, $\angle PQR$ और $\angle PQT$
3. (1) संलग्न हैं।
(2) और (3) संलग्न नहीं हैं कारण – अंत:भाग अलग नहीं हैं।
(4) संलग्न हैं।

प्रश्नसंग्रह 16 **1.** (i) 50° (ii) 27° (iii) 45°
(iv) 35° (v) 70° (vi) 0° (vii) $(90-x)°$
2. 20° और 70°

प्रश्नसंग्रह 17 **1.** (i) 165° (ii) 95° (iii) 60°
(iv) 143° (v) 72° (vi) 180° (vii) $(180-a)°$
2. कोटिपूरक कोणों की जोड़ियाँ – (i) $\angle B$ और $\angle N$
(ii) $\angle D$ और $\angle F$ (iii) $\angle Y$ और $\angle E$
संपूरक कोणों की जोड़ियाँ – (i) $\angle B$ और $\angle G$ (ii) $\angle N$ और $\angle J$. **3.** $\angle X$ और $\angle Z$ परस्पर कोटिपूरक कोण हैं।
4. 65° और 25°

5. (i) $\angle P$ और $\angle M$ (ii) $\angle T$ और $\angle N$ (iii) $\angle P$ और $\angle T$ (iv) $\angle M$ और $\angle N$ (v) $\angle P$ और $\angle N$ (vi) $\angle M$ और $\angle T$

6. $160°$ **7.** $m\angle A = (160 - x)°$

प्रश्नसंग्रह 18 **1.** किरण PL एवं किरण PM; किरण PN एवं किरण PT.

2. नहीं हैं। उन किरणों से एक रेखा नहीं बनती है।

प्रश्नसंग्रह 19 ---

प्रश्नसंग्रह 20 **1.** $m\angle APB = 133°$, $m\angle BPC = 47°$, $m\angle CPD = 133°$

2. $m\angle PMS = (180 - x)°$, $m\angle SMQ = x°$, $m\angle QMR = (180 - x)°$

प्रश्नसंग्रह 21 **1.** $m\angle A = m\angle B = 70°$

2. $40°$, $60°$, $80°$ (3) $m\angle ACB = 34°$, $m\angle ACD = 146°$, $m\angle A = m\angle B = 73°$

प्रश्नसंग्रह 22 **1.** (i) $\frac{71}{252}$ (ii) $\frac{67}{15}$ (iii) $\frac{430}{323}$ (iv) $\frac{255}{77}$ **2.** (i) $\frac{16}{77}$ (ii) $\frac{14}{45}$ (iii) $\frac{-13}{6}$ (iv) $\frac{7}{6}$

3. (i) $\frac{6}{55}$ (ii) $\frac{16}{25}$ (iii) $-\frac{2}{3}$ (iv) 0

4. (i) $\frac{5}{2}$ (ii) $-\frac{8}{3}$ (iii) $-\frac{39}{17}$ (iv) $\frac{1}{7}$ (v) $-\frac{3}{22}$ **5.** (i) $\frac{4}{3}$ (ii) $\frac{100}{121}$ (iii) $\frac{7}{4}$ (iv) $-\frac{1}{6}$ (v) $\frac{2}{5}$ (vi) $-\frac{10}{7}$ (vii) $-\frac{9}{88}$ (viii) $\frac{25}{2}$

प्रश्नसंग्रह 23 ⊙ (i) $\frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}$ (ii) $\frac{23}{30}, \frac{22}{30}, \frac{21}{30}$ (iii) $-\frac{9}{15}, -\frac{7}{15}, \frac{4}{15}$ (iv) $\frac{6}{9}, 0, -\frac{4}{9}$ (v) $-\frac{2}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{3}{4}$ (vi) $\frac{17}{24}, \frac{11}{24}, \frac{-13}{24}$ (vii) $\frac{6}{7}, \frac{8}{7}, \frac{9}{7}$ (viii) $-\frac{1}{8}, -\frac{2}{8}, -\frac{5}{8}$ आदि अनेक

प्रश्नसंग्रह 24 ⊙ (i) 3.25 (ii) -0.875 (iii) 7.6 (iv) $0.41\dot{6}$ (v) $3.\overline{142857}$ (vi) $1.\dot{3}$ (vii) $0.\dot{7}$

प्रश्नसंग्रह 25 **1.** 149 **2.** 0 **3.** 4 **4.** 60 **5.** $\frac{17}{20}$

प्रश्नसंग्रह 26 **1.** -- **2.** (i) 1024 (ii) 125 (iii) 2401 (iv) -216 (v) 729 (vi) 8 (vii) $\frac{64}{125}$ (viii) $\frac{1}{16}$

प्रश्नसंग्रह 27 ⊙ (i) 7^6 (ii) $(-11)^7$ (iii) $\left(\frac{6}{7}\right)^8$ (iv) $\left(-\frac{3}{2}\right)^8$ (v) $(a)^{23}$ (vi) $\left(\frac{p}{5}\right)^{10}$

प्रश्नसंग्रह 28

1. (i) a^2 (ii) m^{-3} (iii) p^{-10} (iv) 1

2. (i) 1 (ii) 49 (iii) $\frac{4}{5}$ (iv) 16

प्रश्नसंग्रह 29 **1.** (i) $\left(\frac{15}{12}\right)^{12}$ (ii) 3^{-8} (iii) $\left(\frac{1}{7}\right)^{-12}$ (iv) $\left(\frac{2}{5}\right)^{6}$ (v) 6^{20} (vi) $\left(\frac{6}{7}\right)^{10}$ (vii) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-20}$ (viii) $\left(\frac{5}{8}\right)^{-6}$ (ix) $\left(\frac{3}{4}\right)^{6}$ (x) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-6}$

2. (i) $\left(\frac{7}{2}\right)^{2}$ (ii) $\left(\frac{3}{11}\right)^{5}$ (iii) $\left(\frac{6}{1}\right)^{3}$ अथवा 6^3 (iv) $\frac{1}{y^4}$

प्रश्नसंग्रह 30 **1.** (i) 25 (ii) 35 (iii) 17 (iv) 64 (v) 33

प्रश्नसंग्रह 31 ---

प्रश्नसंग्रह 32 ⊙ एकपदी = $7x$; a ; 4

द्विपद = $5y - 7z$; $5m - 3$

त्रिपद = $3x^3 - 5x^2 - 11$; $3y^2 - 7y + 5$

बहुपद = $1 - 8a - 7a^2 - 7a^3$

प्रश्नसंग्रह 33 ⊙ (i) $22p + 18q$ (ii) $18a + 24b + 21c$ (iii) $19x^2 - 20y^2$ (iv) $-11a^2b^2 + 44c$ (v) $3y^2 - 8y + 9$ (vi) $4y^2 + 10y - 8$

प्रश्नसंग्रह 34 ⊙ (i) $xy + 7z$ (ii) $4x + 2y + 4z$ (iii) $-12x^2 + 16xy + 20y^2$

(iv) $-10x^2 + 24xy + 16y^2$

(v) $-12x + 30z - 19y$

प्रश्नसंग्रह 35 **1.** (i) $288x^2y^2$ (ii) $92xy^3z^2$

(iii) $48ac + 68bc$ (iv) $36x^2 + 73xy + 35y^2$

2. $(40x^2 + 49x + 15)$ वर्ग सेमी

प्रश्नसंग्रह 36 **1.** $-2(7x + 12y)$ **2.** $-345x^5y^4z^3$

3. (i) 1 (ii) $\frac{5}{2}$ (iii) 1 (iv) 3 (v) -5 (vi) $\frac{69}{5}$

4. 16 वर्ष, 11 वर्ष **5.** 130 **6.** 30 नोट **7.** 132, 66

प्रकीर्ण 1 **1.** (i) 80 (ii) -6 (iii) -48 (iv) 25 (v) 8 (vi) -100 **2.** (i) 15; 675

(ii) 38; 228 (iii) 17; 1683 (iv) 8; 96

3. (i) $\frac{14}{17}$ (ii) $\frac{13}{11}$ (iii) $\frac{3}{4}$

4. (i) 28 (ii) 15 (iii) 36 (iv) 45 (v) 16

5. -- **6.** (i) 77 (ii) 25 (iii) $\frac{49}{24}$ (iv) 1026

7.(i) $\frac{41}{48}$ (ii) $\frac{23}{20}$ (iii) -8 (iv) $\frac{63}{20}$ **8.** --

9. -- **10.** -- **11.** -- **12.** --

13. (i) $55°$ (ii) $(90 - a)°$ (iii) $68°$

(iv) $(50 + x)°$ **14.** (i) $69°$ (ii) $133°$

(iii) $0°$ (iv) $(90 + x)°$ **15.** --

16. (i) $110°$ (ii) $55°$ (iii) $55°$

17. (i) 5^7 (ii) $\left(\frac{3}{2}\right)^3$ (iii) $\left(\frac{7}{2}\right)^2$ (iv) $\left(\frac{4}{5}\right)^3$

18. (i) 1 (ii) $\frac{1}{1000}$ (iii) 64 (iv) 16

19. (i) $8a + 10b - 13c$

(ii) $21x^2 - 10xy - 16y^2$

(iii) $18m - n$ (iv) $2m - 19n + 11p$

20. (i) $x = -10$ (ii) $y = 5$

बहुवैकल्पिक प्रश्न **1.** अंत:मध्य **2.** $\left(\frac{7}{3}\right)^{12}$ **3.** 3 **4.** $\frac{3}{2}$ **5.** $10 \times 3 + (5 + 2)$

प्रश्नसंग्रह 37 **1.** ₹ 240 **2.** 32 गड्डियाँ

3. 18 किग्रा **4.** ₹ 24000 **5.** ₹ 104000

प्रश्नसंग्रह 38 **1.** 10 दिन; 4 दिन **2.** 50 पृष्ठ **3.** 2 घंटे; 3 घंटे **4.** 20 दिन

प्रश्नसंग्रह 39 **1.** ₹ 12800; ₹ 16000

2. ₹ 10000; ₹ 24000 **3.** ₹ 38000; ₹ 9120

4. ₹ 147; ₹ 343 **5.** ₹ 54000; ₹ 15120

प्रश्नसंग्रह 40 **1.** ₹ 1770

2. ₹ 25000; ₹ 375000 **3.** ₹ 14875

4. ₹ 3600 **5.** ₹ 180000

प्रश्नसंग्रह 41 **1.** 10% **2.** ₹ 300 **3.** 5 वर्ष **4.** ₹ 41000 **5.** (i) ₹ 882, ₹ 5082

(ii) ₹ 5000, ₹ 6200 (iii) 2 वर्ष, ₹ 8800

(iv) ₹ 12000, 10 वर्ष (v) ₹ 19200, ₹ 21600

प्रश्नसंग्रह 42 **1.** (i) 14 सेमी; 44 सेमी

(ii) 14 सेमी; 88 सेमी (iii) 98 सेमी; 196 सेमी

(iv) 11.55 सेमी; 23.1 सेमी **2.** 28 सेमी

3. ₹ 56320 **4.** 250 फेरे

प्रश्नसंग्रह 43 **1.** $240°$

2. लघुचाप के नाम – चाप PXQ, चाप PR, चाप RY, चाप XP, चाप XQ, चाप QY

दीर्घचाप के नाम – चाप PYQ, चाप PQR, चाप RQY, चाप XQP, चाप QRX

अर्द्धवृत्त चापों के नाम – चाप QPR, चाप QYR

3. $250°$

प्रश्नसंग्रह 44 **1.** 2 गुना **2.** 9 गुना

3. 90 मी **4.** 8 मी

प्रश्नसंग्रह 45 **1.** 144 वर्गसेमी **2.** 75 वर्गसेमी

3. 46 सेमी **4.** 9 गुना

प्रश्नसंग्रह 46 **1.** 1170 वर्गसेमी **2.** 8.64 वर्गसेमी

3. ₹ 2302750 **4.** 800 फर्श ; 3200 फर्श

5. 156 मी ; 845 वर्गमी

प्रश्नसंग्रह 47 **1.** (i) 54 वर्गसेमी (ii) 150 वर्गसेमी

(iii) 311.04 वर्गमी (iv) 277.44 वर्गमी (v) 181.5 वर्गमी

2. (i) 460 वर्गसेमी (ii) 58.8 वर्गसेमी (iii) 31.6 वर्गमी

(iv) 171 वर्गसेमी **3.** 58.8 वर्गसेमी **4.** 6.5 वर्गमी, ₹ 1950

प्रश्नसंग्रह 48 **1.** (i) 25 इकाई (ii) 40 इकाई

(iii) 15 इकाई **2.** 26 सेमी **3.** 16 सेमी **4.** 12 मी

प्रश्नसंग्रह 49 **1.** (i) हैं (ii) नहीं (iii) नहीं (iv) नहीं (v) हैं (vi) नहीं

2. (i) हैं (ii) नहीं (iii) हैं (iv) नहीं (v) नहीं

प्रश्नसंग्रह 50 **1.** (i) $25a^2+60ab+36b^2$

(ii) $\frac{a^2}{4}+\frac{ab}{3}+\frac{b^2}{9}$ (iii) $4p^2-12pq+9q^2$

(iv) $x^2-4+\frac{4}{x^2}$ (v) $a^2x^2+2abxy+b^2y^2$

(vi) $49m^2-56m+16$ (vii) $x^2+x+\frac{1}{4}$

(viii) $a^2-2+\frac{1}{a^2}$ **2.** $64-\frac{16}{x}+\frac{1}{x^2}$

3. $(mn+7pq)^2$ **4.** (i) 994009 (ii) 10404

(iii) 9604 (iv) 1010025

प्रश्नसंग्रह 51 **1.** (i) x^2-y^2 (ii) $9x^2-25$

(iii) a^2-36 (iv) $\frac{x^2}{25}-36$ **2.** (i) 249996

(ii) 9991 (iii) 2484 (iv) 9996

प्रश्नसंग्रह 52 ⊙ (i) $3\times67\times a\times a\times a\times b\times b$

(ii) $13\times7\times x\times x\times y\times t\times t$

(iii) $2\times2\times2\times3\times a\times a\times b\times b$

(iv) $t\times r\times r\times s\times s\times s$

प्रश्नसंग्रह 53 ⊙ (i) $(p+q)(p-q)$

(ii) $(2x+5y)(2x-5y)$ (iii) $(y+2)(y-2)$

(iv) $\left(p+\frac{1}{5}\right)\left(p-\frac{1}{5}\right)$ (v) $\left(3x+\frac{1}{4}y\right)\left(3x-\frac{1}{4}y\right)$

(vi) $\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right)$ (vii) $ab(a-1)$

(viii) $2x^2(2xy-3x)$ (ix) $\frac{1}{2}(y+4z)(y-4z)$

(x) $2(x+2y)(x-2y)$

प्रश्नसंग्रह 54 **1.** 12.29 मिमी **2.** ₹ 892

3. 626.6 मिमी **4.** 49.4 किग्रा

प्रश्नसंग्रह 55 **1.**

ऊँचाई	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140	कुल
लड़के	3	3	5	3	3	2	2	1	3	5	30

2.

व्यक्ति	1	2	3	4	5	कुल
परिवार	1	13	16	13	7	50

3.

पृष्ठभाग	1	2	3	4	5	6	कुल
बारबांरता	2	8	13	8	5	4	40

4.

रोटियाँ	2	3	4	5	कुल
छात्र	9	10	8	3	30

प्रकीर्ण 2 **1.** 4 वर्ष **2.** 5 दिन

3. ₹ 12000 ; ₹ 18000 **4.** 17.6 सेमी

5. (i) $4a^2-12ab+9b^2$ (ii) $100+20y+y^2$

(iii) $\frac{p^2}{9}+\frac{pq}{6}+\frac{q^2}{16}$ (iv) $y^2-6+\frac{9}{y^2}$

6. (i) x^2-25 (ii) $4a^2-169$ (iii) $16z^2-25y^2$

(iv) $4t^2-25$ **7.** 3.3 किमी

8. 25 मी ; 130 मी ; ₹ 94500

9. 29 इकाई ; 70 इकाई **10.** 384 सेमी^{2}

11. $73y^2z^3(5y^2-2z)$

बहुवैकल्पिक प्रश्न **1.** 36 **2.** 1120

3. ₹ 1600, ₹ 1000.

महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक निर्मिती व अभ्यासक्रम संशोधन मंडळ, पुणे–४११००४.

हिंदी गणित इ. ७वी

₹ 41.00